



كلية التجارة

# مقدمة في بحوث العمليات ( نماذج ونظريتان )

دكتور

إبراهيم موسى عبد الفتاح

أستاذ الرياضيات والإحصاء

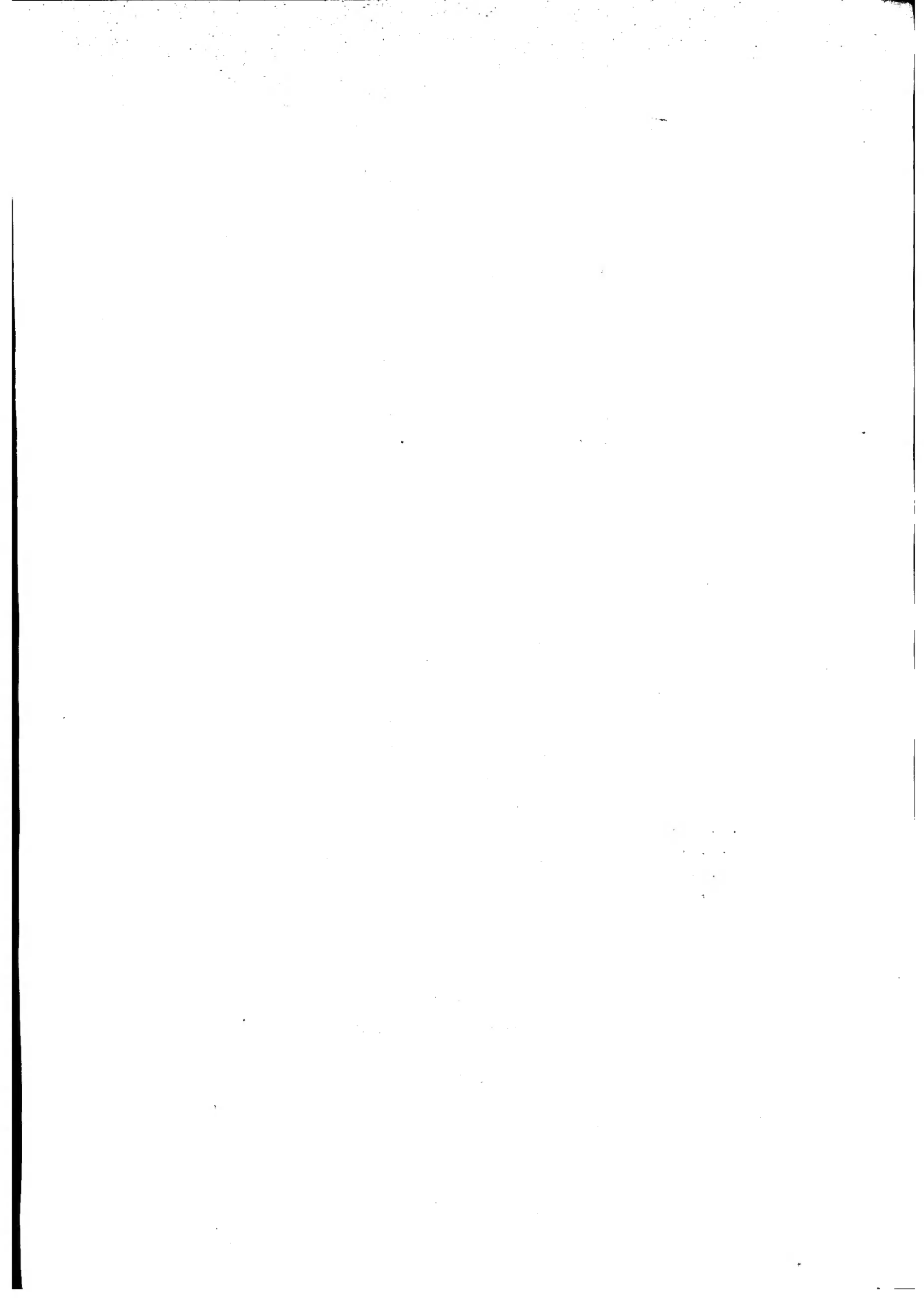
وكيل الكلية لشئون خدمة المجتمع وتنمية البيئة

كلية التجارة - جامعة الزقازيق

الناشر

المكتبة العلمية - الزقازيق

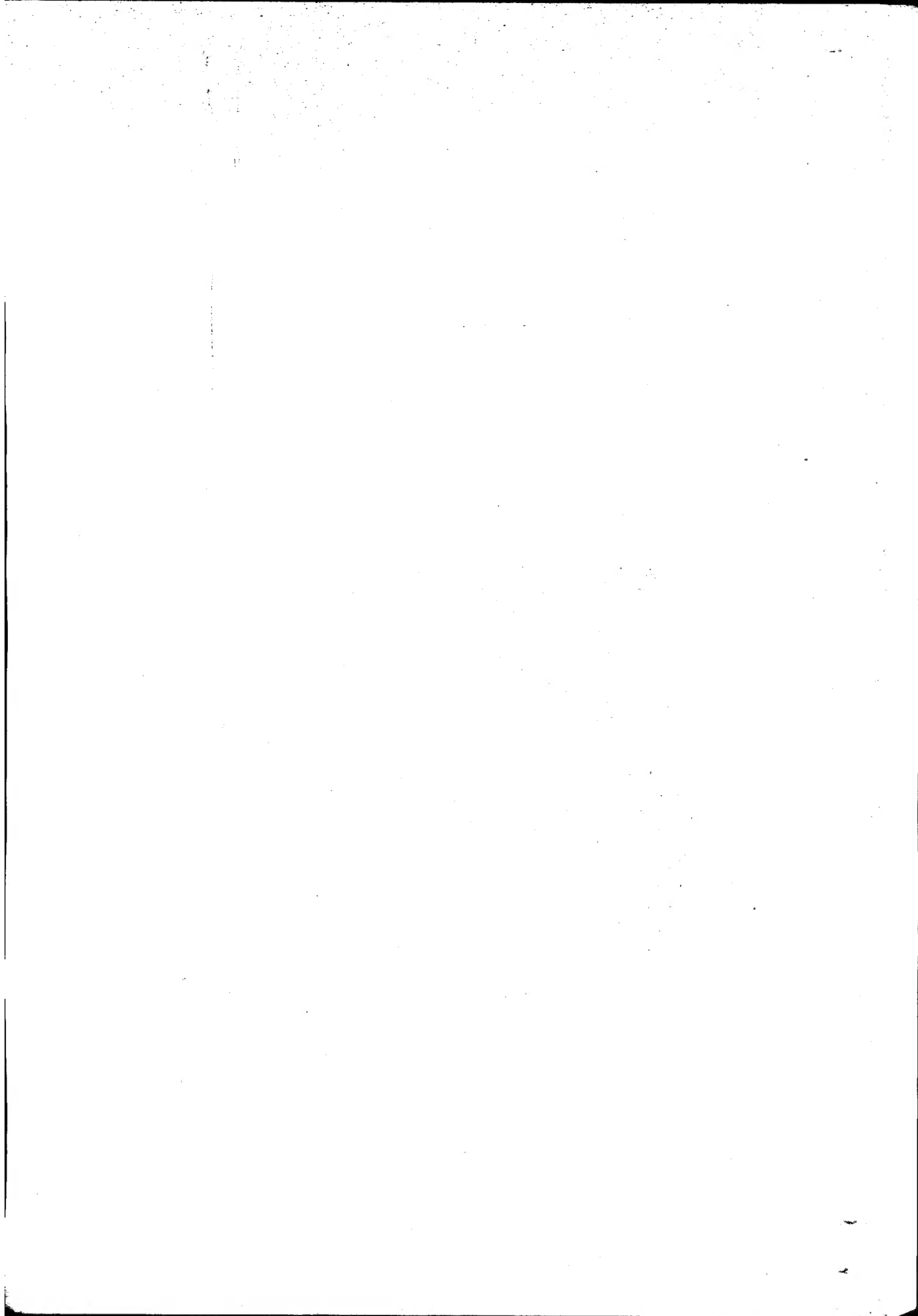
٢٠٠٥ - ٢٠٠٦



بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

﴿وَقُلْ أَعْمَلُوا فَسِيرَى اللَّهِ  
عَمَلَكُمْ وَرَسُولِهِ وَالْمُؤْمِنُونَ﴾

صدق الله العظيم





**الباب الأول**  
**البرمجة الخطية**  
**الصياغة والحل وتحليل الحساسية**

**Linear Programming :**  
**Formulation, Solution and**  
**Sensitivity Analysis**



## فهرس الكتاب

### الصفحة

د	مقدمة .....
١	الباب الأول : البرمجة الخطية : الصياغة والحل وتحليل الحساسية ..
٥	(١-١) مقدمة .....
٧	(٢-١) مجالات استخدام البرمجة الخطية .....
٩	(٣-١) صياغة مشاكل البرمجة الخطية .....
٢١	(٤-١) حل نماذج البرمجة الخطية .....
٢١	(١-٤-١) الحل البياني لنماذج البرمجة الخطية .....
	(٢-٤-١) الحل الرياضي لنموذج البرمجة الخطية
٣٢	(طريقة السمبلكس ) .....
٧٦	(٥-١) مبدول نموذج البرمجة الخطية .....
٨٧	(٦-١) تحليل الحساسية .....
١٤٣	الباب الثاني : برمجة الأعداد الخطية الصحيحة .....
١٤٧	(١-٢) مقدمة .....
١٤٧	(٢-٢) طريقة التقطيع والتحديد .....
١٨٣	الباب الثالث : نماذج النقل والتخصيص : الصياغة والحل .....
١٨٧	(١-٣) نماذج النقل .....
١٨٨	(١-١-٣) صياغة نماذج النقل .....
٢٠١	(٢-١-٣) حل نماذج النقل .....
٢٤٩	(٢-٣) نماذج التخصيص .....
٢٥١	(١-٢-٣) صياغة نماذج التخصيص .....
٢٥٦	(٢-٢-٣) حل نماذج التخصيص .....

٢٨٥	الباب الرابع : نظرية المباريات .....
٢٨٧	(١-٤) مقدمة .....
٢٨٩	(٢-٤) المباريات ثنائية الأطراف صفرية المجموع .....
٢٩٠	(١-٢-٤) الإستراتيجيات البسيطة المتلى ونقطة التوازن .....
٢٩٩	(٢-٢-٤) طريقة السيطرة والتسيد .....
٣٠٣	(٣-٢-٤) الإستراتيجيات المختلطة .....
٣٣٧	الباب الخامس : تحليل الشبكات .....
٣٣٩	(١-٥) تعريف الشبكة .....
٣٣٩	(٢-٥) شبكات الأعمال : شبكات المسار الحرج وبيروت .....
٣٤٧	(١-٢-٥) أسلوب المسار الحرج .....
٣٦٣	(٢-٢-٥) أسلوب بيروت .....
٣٧٧	(٣-٢-٥) تحليل الوقت / تكلفة في شبكات الأعمال .....
٣٩٣	(٣-٥) مشكلة أقصر طريق .....
٤٢٥	(٤-٥) مشكلة أقصى تدفق .....
٤٤٩	الباب السادس : نظرية صفوف الانتظار .....
٤٥١	(١-٦) مقدمة .....
٤٥٣	(٢-٦) عناصر صفوف الانتظار .....
٤٦٢	(٣-٦) بعض نماذج صفوف الانتظار .....
٤٦٣	(١-٣-٦) صف انتظار واحد ومركز خدمة واحد .....
	(٢-٣-٦) صف انتظار واحد وعدة مراكز خدمة على
٤٧٦	التوازي .....
٤٨٩	(٤-٦) تحليل التكاليف لصفوف الانتظار .....
٥٠٣	الجدول .....
٥٠٩	المراجع .....

## مقدمة

تعد بحوث العمليات إحدى الأساليب العلمية الهامة التي تساعد الإدارة في اتخاذ القرارات بالدقة والموضوعية اللازمين . ولعل السبب في تسميتها بهذا الاسم يرجع إلى العمليات الحربية التي كانت أول المجالات التي استخدمت فيها ، فخلال الحرب العالمية الثانية كلفت وزارة الدفاع البريطانية فريقاً من علمائها من تخصصات مختلفة لدراسة المشاكل التكتيكية والإستراتيجية المتعلقة بالدفاعين الجوي والأرضي ، ولقد تمكن الفريق - اعتماداً على بعض النظريات الرياضية والإحصائية - من الاستخدام والتوزيع الأمثل للموارد المحدودة من رجال ومعدات الجيش البريطاني ، مما كان له عظيم الأثر من صد الهجوم الألماني وتحويل بريطانيا من موقف الدفاع إلى موقف الهجوم عام ١٩٤٢ . هذه النتائج الباهرة التي حققها هذا الفريق شجعت إدارة الحرب الأمريكية على القيام بدراسات وأنشطة مماثلة وإن كانت التطبيقات قد مست مجالات أوسع من تلك التي تمت في بريطانيا مثل اختراع غطاط طيران جديدة وخطيط الغمام البحر والاستخدام الفعال للتجهيزات الإلكترونية .

وبعد إنتهاء الحرب العالمية الثانية فإن النجاح الكبير الذي تحقّق في مجال الحرب نتيجة تطبيق علم " بحوث العمليات " جذب انتباه رجال الإدارة والاقتصاد والمهندسة نحو هذا الحقل الجديد من المعرفة ، وتعدى ذلك بريطانيا وأمريكا ليشمل معظم دول العالم سواء المتقدمة منها أو النامية ، حيث تم إنشاء مراكز بحثية متخصصة وإصدار العديد من مجلات بحوث العمليات وذلك من أجل إيجاد الحلول المثلى للمشكلات التي تواجه منظمات الأعمال بتلك الدول في شتى المجالات مثل

الإنتاج والتخزين والتمويل والتسويق والنقل وتقييم السياسات البديلة للتشغيل والاستثمار .

ولقد شهدت السنوات الأخيرة تطوراً هائلاً في أساليب بحوث العمليات وذلك بسبب التسهيلات التي أحدثها التطور الهائل والموازي في علم الحاسب الآلي وخاصة تطور طاقاته الهائلة في السرعة الحسابية وفي تخزين واسترجاع المعلومات وهو ما يطلق عليه " ثورة الحاسبات " . كما اتسعت مجالات تطبيق بحوث العمليات ولم تعد قاصرة على العمليات الحربية والصناعية بل اتسعت كثيراً لتساهم في إيجاد الحلول المثلى ودعم اتخاذ القرارات الصحيحة في مجالات الصحة والتعليم والسكان والمؤسسات المالية والمكتبات وحتى في مجالات السياسة والقانون وكشف الجرائم .

ويهدف هذا الكتاب إلى مد الدارسين أو الباحثين أو المديرين ببعض أساليب ونماذج بحوث العمليات مع التركيز على التطبيقات الاقتصادية الخاصة بهذه الأساليب ، إذ لا جدوى من تقديم أي أسلوب أو نموذج نظري إذا لم يقترن بتطبيق في الحياة العملية ، وذلك بهدف تخريج جيلاً جديداً من الدارسين والممارسين الذين يستطيعون استخدام الأساليب الكمية الحديثة وتكنولوجيا المعلومات وأيضاً بهدف تأصيل توجه الجامعة وكلياتها ومعاهدها المختلفة لخدمة المجتمع وحل ما يعترضه من مشاكل باستخدام الأساليب العلمية الحديثة خصوصاً وأن بيئة الأعمال تتسم الآن بالديناميكية والتغير السريع والمتلاحق .

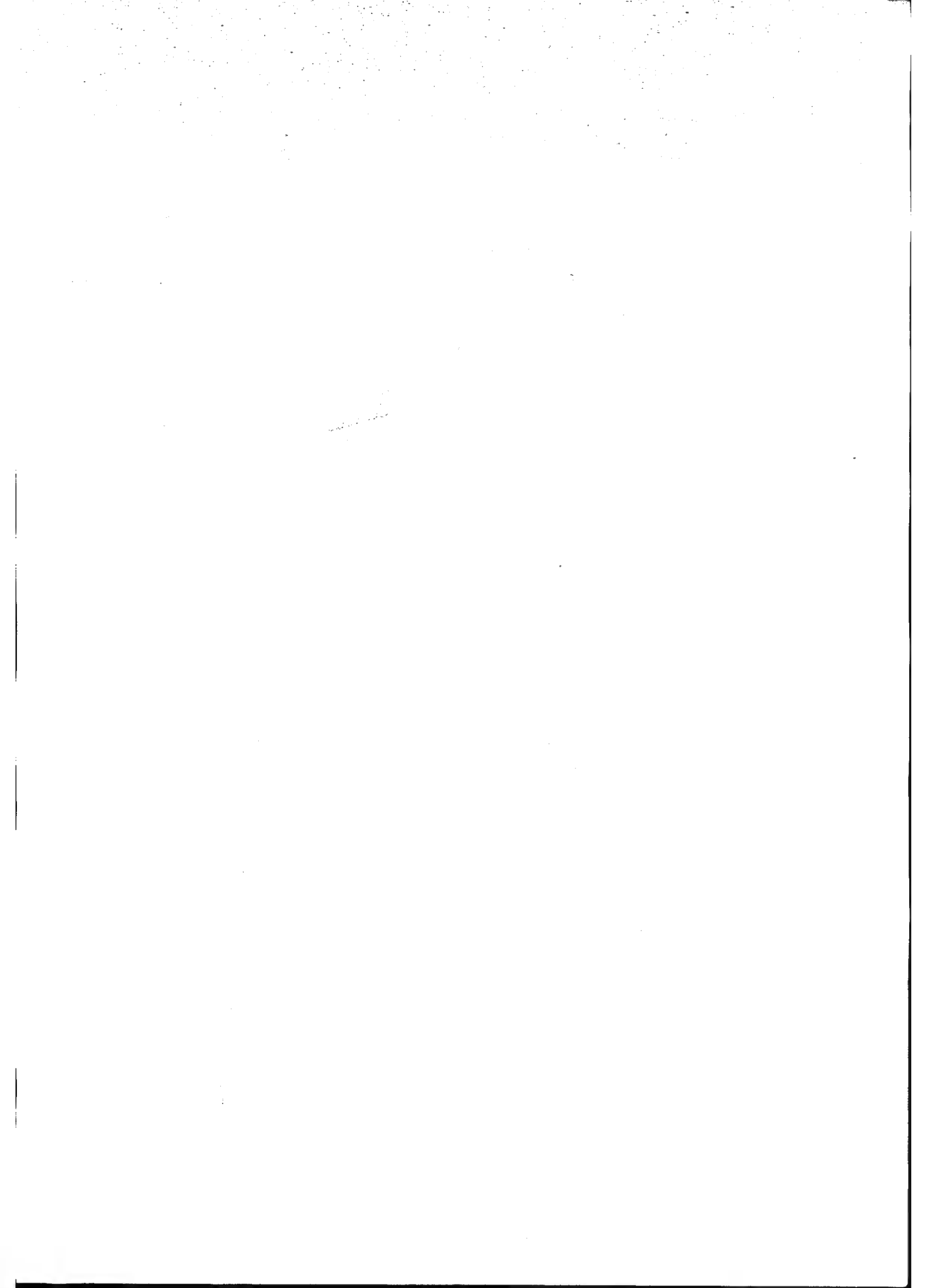
ولقد راعيت في هذا العرض السلاسة في الأسلوب والوضوح في طرح الأفكار والبعد - بقدر الإمكان - عن الاشتقاقات والإثباتات الرياضية التفصيلية ، والإكثار من الأمثلة التطبيقية المتنوعة والحلول والتى لا تعتبر تكراراً عملاً للفكرة

نفسها ، وهذا من شأنه يساعد في فهم واستيعاب المادة العلمية واتساع دائرة الاستفادة لكل الشرائح من الدارسين والممارسين الذين يستخدمون هذا الكتاب .

ويضم الكتاب ستة أبواب ، حيث يتضمن الباب الأول أسلوب البرمجة الخطية من حيث صياغة مشاكل البرمجة الخطية والحل البياني والحل الرياضي ( المعروف باسم طريقة السمبلكس) لتلك المشاكل ، واشتقاق نموذج المبدول ثم تحليل الحساسية لنموذج البرمجة الخطية ، أما الباب الثاني فيتضمن برمجة الأعداد الخطية الصحيحة وحل البرنامج باستخدام طريقة التفرع والتحديد ، ويتضمن الباب الثالث صياغة وحل نماذج النقل بالإضافة إلى صياغة وحل نماذج التخصيص ، أما الباب الرابع فيشمل نظرية المباريات ذات المجموع الصفري والتي تفيد في تحديد الإستراتيجيات المثلى في ظل الأوضاع التنافسية في حالة الإستراتيجيات البسيطة والإستراتيجيات المختلطة ، ويتضمن الباب الخامس تحليل الشبكات والتي تضم شبكات الأعمال ( شبكات المسار الحرج وبيرت ) ومشكلة أقصر طريق بالشبكة ومشكلة أقصى كمية تدفق خلال الشبكة ، أما الباب السادس فيتضمن عرض لنظرية صفوف الانتظار من حيث عناصرها وبعض نماذجها بالإضافة إلى تحليل التكاليف لصفوف الانتظار .

وَأدعو الله العليّ القدير أن أكون قد وفقت في عرض موضوعات هذا الكتاب ، والله من وراء القصد وهو الهادي إلى سواء السبيل .

**المؤلف**





## الباب الأول

### البرمجة الخطية

#### ■ مقدمة

#### ■ مجالات استخدام البرمجة الخطية

#### ■ صياغة مشاكل البرمجة الخطية

#### ■ حل نماذج البرمجة الخطية

#### ◀ العمل البياني لنموذج البرمجة الخطية

#### ◀ العمل الرياضي لنموذج البرمجة الخطية [ طريقة السمبلكس ]

#### ■ مبدول نموذج البرمجة الخطية

#### ■ تحليل الحساسية

#### ◀ التغير في معاملات دالة الهدف

#### ◀ التغير في ثوابت القيود الهيكلية

#### ◀ التغير في معاملات القيود الهيكلية

#### ◀ إضافة قيد هيكل جديد

#### ◀ إضافة متغير جديد

1. The first part of the document is a list of names and addresses of the members of the committee.

2. The second part of the document is a list of names and addresses of the members of the committee.

3. The third part of the document is a list of names and addresses of the members of the committee.

4. The fourth part of the document is a list of names and addresses of the members of the committee.

5. The fifth part of the document is a list of names and addresses of the members of the committee.

6. The sixth part of the document is a list of names and addresses of the members of the committee.

7. The seventh part of the document is a list of names and addresses of the members of the committee.

8. The eighth part of the document is a list of names and addresses of the members of the committee.

9. The ninth part of the document is a list of names and addresses of the members of the committee.

10. The tenth part of the document is a list of names and addresses of the members of the committee.

## (١ - ١) مقدمة :

تعتبر مشكلة توزيع الموارد المحدودة بين الاستخدامات المتعددة البديلة من أبرز وأهم المشاكل التي تواجه الإدارة أو متخذي القرار في حياتنا العملية .

فمثلاً ، عند إجراء العملية الإنتاجية فإن المشكلة التي تواجه المديرين هي كيفية توزيع عوامل الإنتاج المتاحة (والمحدودة) على المنتجات المقرر إنتاجها بغرض تحقيق أكبر قدر من الأرباح أو تخفيض تكاليف الإنتاج إلى أدنى حد ممكن أو زيادة عدد الوحدات المنتجة أو تحسين جودة المنتج أو أى مقاييس أخرى للكفاية وذلك فى ضوء مجموعة من القيود . هذه القيود قد ترجع إلى ظروف الإنتاج أو التمثيل أو المواد الخام أو التخزين أو التسويق أو النقل أو نوعية الموارد البشرية وغيرها من القيود التي يجب أن يتم تحقيق الهدف فى ضوئها .

والبرمجة الرياضية كأسلوب من أساليب بحوث العمليات تلعب دوراً كبيراً فى حل مثل تلك المشاكل ، فهي طريقة رياضية لتخصيص مجموعة من الموارد والإمكانات المحدودة على عدد من الحاجيات المتنافسة على هذه الموارد بطريقة تحقق الوضع الأفضل والأكثر ملائمة بالنسبة للمشكلة أو الهدف المدروس .

وأى برنامج رياضى يشمل بصفة عامة ، العناصر الآتية :

## ١- المتغيرات القرارية :

هي تلك المتغيرات التي يمكن اتخاذ قرارات بشأنها ، ويفترض أن أصغر قيمة لكل متغير من هذه المتغيرات هي الصفر ، ويعبر عنها في الصورة :  $x_1, x_2, \dots, x_n$  ، حيث  $n$  تمثل عدد المتغيرات القرارية في النموذج .

## ٢- دالة الهدف :

هي دالة رياضية تعتمد على المتغيرات القرارية ، وعادة تتضمن هذه الدالة هدف معين مطلوب تحقيقه مثل تعظيم الربح لأقصى حد ممكن أو تخفيض التكاليف لأدنى حد ممكن أو رفع كفاءة النظام القائم إلى أقصى درجة ممكنة. وتعتبر دالة الهدف المؤشر الوحيد لبلوغ الحل الأمثل .

## ٣- القيود الهيكلية :

هي مجموعة من العلاقات الرياضية التي تعتمد على كل من المتغيرات القرارية والعلاقات الفنية بين مكونات النظام ، إذ لا بد من وجود قيود ثابتة وحدود للموارد والإمكانات ، ولولا وجود هذه القيود والحدود الثابتة لما كانت هناك مشكلة . ويعبر عن هذه القيود الهيكلية في صورة مجموعة من المعادلات أو المتباينات الرياضية تأخذ صورة -  $a \leq x \leq b$  .

#### ٤ - قيد عدم السلبية :

ويعنى هذه القيد أن جميع المتغيرات القرارية الداخلة فى دالة الهدف والقيد الهيكلية تساوى فقط 0 أو قيمة موجبة ، وهذا شرط أساسى وطبيعى فى معظم نظم الحياة الواقعية ، ويعبر عن هذا القيد كالآتى :

$$x_i \geq 0 \quad \text{حيث} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

حيث  $n$  ، كما سبق ، تمثل عدد المتغيرات القرارية فى النموذج .

والبرمجة الخطية هى أحد أنواع البرمجة الرياضية وفيها تكون :

١ - دالة الهدف ويرمز لها بالرمز  $Z(x)$  ، وسوف نكتب بعد ذلك  $Z$  على سبيل الاختصار ، دالة خطية ( أى دالة من الدرجة الأولى ) ،

٢ - القيود الهيكلية على شكل معادلات أو متباينات خطية أيضاً .

وتعتبر العلاقة خطية بين ظاهرتين إذا كان تغير قيمة الظاهرة

الأولى بوحدة واحدة يؤدي إلى تغير قيمة الظاهرة الثانية بمقدار ( أو بنسبة ) ثابت ( ثابتة ) .

#### ( ١ - ٢ ) مجالات استخدام البرمجة الخطية

اقتترنت التطويرات النظرية للبرمجة الخطية بحل عدد كبير من

التطبيقات العملية فى مجالات المعرفة المختلفة ولاسيما فى مجال

الإدارة والاقتصاد والوصول فيها إلى القرارات المثلى ، ونعرض فيما

يلى - على سبيل المثال لا الحصر - بعض التطبيقات الهامة :

## ١ - تخطيط الإنتاج :

حيث تكون المشكلة في اختيار عدد معين من الوحدات الواجب إنتاجها من بين بدائل عديدة مع الأخذ في الاعتبار طاقات الإنتاج ومستلزماته المتاحة واحتياجات كل منتج من هذه الطاقات والمستلزمات ، مع تحقيق أقصى ربح ممكن أو أدنى تكاليف ممكنة .

## ٢ - توزيع الاستثمارات :

حيث تكون المشكلة في تحديد أنسب أنواع الاستثمار من بين البدائل المختلفة المتاحة وتوزيع الموارد المتاحة بين هذه الاستثمارات بحيث يكون العائد من عملية الاستثمار أكبر ما يمكن .

## ٣ - النقل :

تتركز المشكلة في كيفية نقل المواد الخام أو المنتجات أو الأفراد من مصادر بها عروض ( مثل المخازن أو المناجم أو المزارع ) إلى جهات استخدام لها طلبات ( مثل المصانع أو مراكز التسويق والاستهلاك ) بحيث يتم اختيار مسارات النقل التي تحقق أعلى كفاءة توزيعية تواجه كل الطلبات بأكبر أرباح ( أو بأقل تكاليف نقل ) ممكنة .

## ٤ - التخصيص :

يكون الهدف في هذه الحالة هو كيفية تخصيص أو توزيع الموارد كالأفراد أو المركبات أو الأجهزة إلى جهات الاستخدام

المختلفة بحيث يتحقق أكبر عائد ممكن أو أعلى كفاءة تشغيل ممكنة أو أقل فاقد ممكن .

#### ٥ - توزيع ميزانية الإعلان :

حيث يكون الهدف هو كيفية توزيع ميزانية الإعلان المحدودة بين وسائل الإعلان المختلفة من صحافة ومجلات وإذاعة وتلفزيون ... الخ ، بحيث تكون فعالية الإعلان مرتفعة إلى أقصى حد ويصل الإعلان إلى أكبر عدد ممكن من القراء والمشاهدين .

#### (١ - ٣) صياغة مشاكل البرمجة الخطية

سوف نقدم الأمثلة الآتية لكي نتبين كيفية صياغة المشكلة حتى يمكن استخدام البرمجة الخطية لحلها .

#### ١ - مشكلة الإنتاج :

تقوم شركة فيليبس بالتخطيط لإنتاج نوعين جديدين من جهازى التلفزيون والفيديو ، وتواجه إدارة التخطيط مشكلة تحديد كمية الإنتاج من كل من هذين المنتجين فى ضوء البيانات التالية :

١ - يحتاج إنتاج التلفزيون الواحد إلى 3 ساعات عمل فنى ،  
9 وحدات من المواد الخام ، أما إنتاج الفيديو الواحد فيحتاج إلى  
5 ساعات عمل فنى ، 6 وحدات من المواد الخام .

٢ - الحد الأقصى لساعات العمالة الفنية فى الشركة عبارة عن 300 ساعة يومياً ، والمواد الخام المتاحة 720 وحدة يومياً .

٣ - عدد الوحدات الممكن توزيعها من أجهزة الفيديو لا تتجاوز 50 جهازاً يومياً ، بينما تستطيع الشركة بيع أية كميات منتجة من التلفزيونات .

٤ - بيع التلفزيون الواحد يحقق ربحاً قدره 400 جنيه ، بينما الربح المتحقق للشركة من بيع جهاز الفيديو قدره 600 جنيه .

المطلوب صياغة المشكلة فى الشكل النمطى لنموذج البرمجة الخطية .

الحل :

لكي تصاغ هذه المشكلة فى صورة نموذج خطى نلاحظ ما يلى :

١ - المتغيرات القرارية الواجب تحديدها هى عدد الوحدات الواجب إنتاجها من التلفزيون ،  $x_1$  ، ومن أجهزة الفيديو ،  $x_2$  .

٢ - دالة الهدف : حيث أن إنتاج الوحدة الواحدة من أجهزة التلفزيون يحقق ربحاً قدره 400 جنيه ، والوحدة الواحدة من أجهزة الفيديو يحقق ربحاً قدره 600 جنيه فيكون الربح الإجمالى المتحقق هو :

$$400 x_1 + 600 x_2$$

ويكون الهدف هو تعظيم الدالة

$$Z = 400 x_1 + 600 x_2$$

٣ - القيود الهيكلية : بخصوص قيد العمالة الفنية ، نجد أن إنتاج التلفزيون الواحد يحتاج إلى 3 ساعات عمالة فنية ، وإنتاج



جهاز الفيديو الواحد يحتاج إلى 5 ساعات عمالة فنية ، وحيث أن العمالة الفنية المستخدمة ينبغي ألا يتجاوز المتاح منها وهو 300 ساعة عمل فني ، فيكون قيد العمالة الفنية هو :

$$3x_1 + 5x_2 \leq 300$$

بخصوص قيد المواد الخام ، فبالمثل ، نجد أن إنتاج جهاز التلفزيون يتطلب استخدام 9 وحدات من المواد الخام ، وإنتاج جهاز الفيديو يتطلب استخدام 6 وحدات من المواد الخام ، والمستخدم من المواد الخام ينبغي ألا يتجاوز المتاح منها وهو 720 وحدة ، فمصاغ القيد كالأتي :

$$9x_1 + 6x_2 \leq 720$$

٤ - حيث أنه لا يمكن توزيع أكثر من 50 جهاز فيديو يومياً ، لذلك فإن عدد الوحدات الواجب إنتاجها من أجهزة الفيديو يجب ألا يزيد عن 50 جهاز في اليوم ، ويعبر عن هذا القيد في الصورة

$$x_2 \leq 50$$

٥ - قيد عدم السلبية : ويعني أن المتغيرات القرارية يجب أن تكون كميات غير سالبة ، ويعبر عن ذلك في الصورة :

$$x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2)$$

وعلى ذلك يمكن صياغة المشكلة السابقة على النحو التالي :

المطلوب إيجاد قيم  $x_i$  ،  $(i = 1, 2)$  التي تحقق الحد الأقصى للدالة :

$$\text{Maximize } Z = 400 x_1 + 600 x_2$$

بشروط أن :

$$3 x_1 + 5 x_2 \leq 300$$

$$9 x_1 + 6 x_2 \leq 720$$

$$x_2 \leq 50$$

$$x_i \geq 0 , \quad (i = 1, 2)$$

ب - مشكلة التغذية :

بفرض أن وزارة التربية والتعليم بصدد تكوين وجبة غذائية لتلاميذ المرحلة الابتدائية ، على أن تتكون الوجبة الواحدة من الخبز والبيض والجبن والفاكهة لتحتوى على البروتينات والكربوهيدرات والفيتامينات ، وتقتضى الضرورة الصحية أن تحتوى الوجبة على 60 ملليجرام على الأقل من البروتينات ، بينما وحدات الكربوهيدرات لا تزيد عن 40 ملليجرام ولا تقل عن 20 ملليجرام ، أما بالنسبة للفيتامينات فيجب ألا تقل عن 50 ملليجرام فى الوجبة الواحدة .

ويحتوى رغيف الخبز على 5 ، 10 ، 2 ملليجرام من البروتينات والكربوهيدرات والفيتامينات على الترتيب ، بينما تحتوى البيضة على 8 ، 20 ملليجرام من البروتينات والكربوهيدرات على التوالى ، وتحتوى قطعة الجبن ( 50 جرام ) على 15 ، 12 ، 5 ملليجرام من البروتينات والكربوهيدرات والفيتامينات على الترتيب ، وتحتوى الوحدة الواحدة من الفاكهة على 8 ، 15 ، 30 ملليجرام من البروتينات والكربوهيدرات والفيتامينات على الترتيب .

فاذا علمت أن ثمن رغيف الخبز 15 قرشاً ، و ثمن البيضة الواحدة 40 قرشاً و ثمن قطعة الجبن 60 قرشاً و ثمن الوحدة الواحدة من الفاكهة في المتوسط 50 قرشاً .

المطلوب صياغة المشكلة في الشكل النمطي لنموذج البرمجة الخطية .

الحل :

لصياغة هذه المشكلة يمكن وضع بياناتها في الجدول التالي :

الحدود الدنيا والعليا للعناصر الغذائية الواجب تحقيقها	الفاكهة	الخبز	الجبن	البيض	
البروتينات	5	20	15	8	60 ملليجرام كحد أدنى
الكربوهيدرات	10	8	12	14	40 ملليجرام كحد أقصى، 20 ملليجرام كحد أدنى
الفيتامينات	2	--	5	30	50 ملليجرام كحد أدنى
ثمن شراء الوحدة	15	40	60	50	

المتغيرات القرارية هي :

- الكمية الواجب تضمينها من الخبز في الوجبة الواحدة هي  $X_1$
- الكمية الواجب تضمينها من البيض في الوجبة الواحدة هي  $X_2$
- الكمية الواجب تضمينها من الجبن في الوجبة الواحدة هي  $X_3$
- الكمية الواجب تضمينها من الفاكهة في الوجبة الواحدة هي  $X_4$

ويكون الهدف هو محاولة جعل تكلفة الوجبة الواحدة أصغر ما يمكن ، أى إيجاد النهاية الصغرى للدالة :

$$Z = 15 x_1 + 40 x_2 + 60 x_3 + 50 x_4$$

وذلك فى ظل مجموعة القيود الهيكلية الآتية :

القيود الخاص بالبروتينات : حيث أن الكمية الواجب توافرها فى الوجبة الواحدة من البروتينات ينبغي ألا تقل عن 60 ملليجرام ، فيكون القيد كالاتى :

$$5 x_1 + 20 x_2 + 15 x_3 + 8 x_4 \geq 60$$

وبالمثل ، بخصوص الكربوهيدرات فيوجد قيدان : القيد الأول هو ألا تزيد كمية الكربوهيدرات عن 40 ملليجرام ويكون كالتالى :

$$10 x_1 + 8 x_2 + 12 x_3 + 14 x_4 \leq 40$$

بينما القيد الثانى هو ألا تقل كمية الكربوهيدرات عن 20 ملليجرام فى الصورة :

$$10 x_1 + 8 x_2 + 12 x_3 + 14 x_4 \geq 20$$

القيود الخاص بالفيتامينات : حيث أن الكمية الواجب توافرها فى الوجبة الواحدة من الفيتامينات ينبغي ألا تقل عن 50 ملليجرام ، فيكون القيد على الصورة :

$$2 x_1 + 5 x_3 + 30 x_4 \geq 50$$

وأخيراً يأتي قيد عدم السلبية ، ويعنى أن الكميات الواجب استخدامها من الخبز والبيض والجبن والفاكهة فى الوجبة وهى :  
 $x_1, x_2, x_3, x_4$  يجب ألا تكون سالبة ، أى أن :

$$x_i \geq 0, \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

وتكون الصيغة الرياضية للمشكلة السابقة على النحو التالى :  
 المطلوب إيجاد قيم  $x_i$  ,  $(i = 1, 2, 3, 4)$  التى تحقق الحد الأدنى للدالة ، أى :

$$\text{Minimize } Z = 15 x_1 + 40 x_2 + 60 x_3 + 50 x_4$$

بشرط أن :

$$5 x_1 + 20 x_2 + 15 x_3 + 8 x_4 \geq 60$$

$$10 x_1 + 8 x_2 + 12 x_3 + 14 x_4 \leq 40$$

$$10 x_1 + 8 x_2 + 12 x_3 + 14 x_4 \geq 20$$

$$2 x_1 + 5 x_3 + 30 x_4 \geq 50$$

$$x_i \geq 0, \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

ج - مشكلة جدولة الطائرات :

تتألف خطوط إحدى شركات الطيران من 3 أنواع : قصيرة المدى ، متوسطة المدى ، وطويلة المدى . وتقوم الشركة باستئجار الطائرات المناسبة من أحد المصانع كل عام ، فإذا علمت أن الربح الذى تحققه الشركة فى العام من كل طائرة تعمل على هذه الخطوط الثلاثة تقدر كما يلى :

7 مليون دولار من الخطوط طويلة المدى .

5 مليون دولار من الخطوط متوسطة المدى .

2 مليون دولار من الخطوط قصيرة المدى .

ويعمل في الشركة الكادر التالي :

150 طيار

100 مهندس

750 مضيف ومضيفة

وتحتاج كل طائرة تعمل على الخطوط الثلاث إلى الكادر التالي :

الخطوط	طويلة المدى	متوسطة المدى	قصيرة المدى
عدد الطيارين	4	2	1
عدد المهندسين	1	4	2
عدد المضيفين والمضيفات	6	4	3

المطلوب صياغة المشكلة في الشكل النمطي لنموذج البرمجة

الخطية .

الحل :

المتغيرات القرارية هي :

عدد الطائرات الواجب استئجارها في العام من المصنع لتعمل

على الخطوط طويلة المدى هي :  $X_1$

عدد الطائرات الواجب استئجارها فى العام من المصنع لتعمل

على الخطوط متوسطة المدى هى :  $x_2$

عدد الطائرات الواجب استئجارها فى العام من المصنع لتعمل

على الخطوط قصيرة المدى هى :  $x_3$

وتصاغ المشكلة على النحو التالى :

$$\text{Max } Z = 7 x_1 + 5 x_2 + 2 x_3$$

بشرط أن :

$$4 x_1 + 2 x_2 + x_3 \leq 150 \quad (\text{قيد الطيارين}) :$$

$$x_1 + 4 x_2 + 2 x_3 \leq 100 \quad (\text{قيد المهندسين}) :$$

$$4 x_1 + 4 x_2 + 3 x_3 \leq 750 \quad (\text{قيد المضيفين والمضيفات}) :$$

$$x_i \geq 0, \quad (i=1, 2, 3).$$

#### د - مشكلة تخصيص ميزانية الإعلان :

تخطط إحدى شركات الإعلانات لوضع برنامج للإعلان عن منتج جديد لأحد عملائها ، وأمام الشركة 3 وسائل للإعلان عن المنتج هى : الصحف والمجلات ، والإذاعة ، والتلفزيون . والجدول التالى يوضح تكلفة الإعلان الواحد فى كل وسيلة من هذه الوسائل وعدد الأشخاص ( بالمليون ) الذين يصلهم الإعلان الواحد ( تحت وفوق 25 عاما ) شهريا :

تلفة الإعلان بالجنيه	عدد الأشخاص تحت 25 علما	عدد الأشخاص فوق 25 علما	
1500	2	3	الصحف والمجلات
1100	3	4	الإذاعة
3000	6	5	التلفزيون

وتهدف الشركة إلى تحقيق الأهداف التالية :

١ - لا يقل عدد الأشخاص تحت 25 علما الذين يصلهم الإعلان عن المنتج في الشهر عن 95 مليون شخص .

٢ - لا يزيد عدد الأشخاص فوق 25 علما الذين يصلهم الإعلان عن المنتج في الشهر عن 60 مليون شخص .

٣ - عدد الأشخاص الذين يصلهم الإعلان عموما عن المنتج لا يقل عن 200 مليون شخص في الشهر .

٤ - تكلفة الإعلانات بالإذاعة والتلفزيون في الشهر يجب ألا تتجاوز 50000 جنيه في الشهر .

المطلوب : صياغة المشكلة في الشكل التالي لنموذج البرمجة الخطية.

الحل :

المتغيرات القرارية هي :

عدد مرات الإعلان بالصحف والمجلات في الشهر هو :  $x_1$



عدد مرات الإعلان بالإذاعة في الشهر هو :  $x_2$

عدد مرات الإعلان بالتلفزيون في الشهر هو :  $x_3$

وتصاغ المشكلة على النحو التالي :

$$\text{Min } Z = 1500 x_1 + 1100 x_2 + 3000 x_3$$

بشروط أن:

$$2 x_1 + 3 x_2 + 6 x_3 \geq 95$$

$$3 x_1 + 4 x_2 + 5 x_3 \geq 60$$

$$5 x_1 + 7 x_2 + 11 x_3 \geq 200$$

$$1100 x_2 + 3000 x_3 \leq 50000$$

$$x_i \geq 0 , \quad (i = 1, 2, 3) .$$

وبصفة عامة ، فإن الصيغة العامة لنموذج البرمجة الخطية يمكن

التعبير عنها كما يلي :

إذا كان  $x_i$  يشير إلى الكمية الواجب تحديدها من المتغير (  $i$  )

وإذا كان  $t_i$  هو ربح ( أو تكلفة ) الوحدة من المتغير (  $i$  )

وإذا كان  $a_{ij}$  هو المعامل الفنى للمتغير (  $i$  ) من القيد (  $j$  )

وإذا كان  $n$  هو عدد المتغيرات القرارية ، أى أن :  $i = 1, 2, \dots, n$

وإذا كان  $m$  هو عدد القيود الهيكلية ، أى أن :  $j = 1, 2, \dots, m$

وإذا كان  $c_j$  هي الكمية المطلقة للقيد (  $j$  )

فإن المطلوب هو :

إيجاد الكميات  $x_1, x_2, \dots, x_n$  التي تحقق الحد الأقصى (أو الأدنى) للدالة:

$$Z = t_1 x_1 + t_2 x_2 + \dots + t_n x_n$$

بشرط أن :

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n \leq (\text{أو } \geq \text{أو } =) c_1$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n \leq (\text{أو } \geq \text{أو } =) c_2$$

$\vdots$

$\vdots$

$$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n \leq (\text{أو } \geq \text{أو } =) c_m$$

$$x_i \geq 0, \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n).$$

ويمكن كتابة النموذج السابق على الصورة المختصرة الآتية :

المطلوب تحديد الكميات  $x_i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ) التي

تحقق الحد الأقصى (أو الأدنى) للدالة :

$$Z = \sum_{i=1}^n t_i x_i$$

بشروط أن :

$$\sum_{i=1}^n a_{ji} x_i \leq (\text{أو } \geq \text{أو } =) c_j \quad (j = 1, 2, \dots, m)$$

$$x_i \geq 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

## (٤-١) حل نماذج البرمجة الخطية

بعد أن تعرضنا في الجزء السابق لمجالات استخدام أسلوب البرمجة الخطية وكيفية صياغة المشاكل التطبيقية في صورة نماذج رياضية فإننا نحاول الآن حل النموذج ، أى تحديد ما هي القيم التي ستأخذها المتغيرات القرارية  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  والتي تحقق كلا من القيود الهيكلية وقيود عدم السلبية وتجعل دالة الهدف  $(Z)$  أكبر (أو أصغر) ما يمكن .

يجب في البداية أن نفرق بين نوعين من الحلول لنموذج البرمجة الخطية وهما :

- أ - الحل الأساسي المسموح به ( أو الحل الممكن ) وهو الحل الذي يحقق كافة القيود الهيكلية وقيود عدم السلبية .
- ب - الحل الأمثل وهو ذلك الحل الأساسي المسموح به والذي يجعل دالة الهدف أكبر (أو أصغر) ما يمكن .

ويوجد طريقتان أساسيتان لحل نموذج البرمجة الخطية هما :

- ١ - الحل البياني .
- ٢ - الحل الرياضي والمعروف باسم طريقة السمبلكس .

### ١- الحل البياني لنماذج البرمجة الخطية

يمكن إيجاد حل تقريبي لنماذج البرمجة الخطية باستخدام التمثيل البياني للدوال ، ويعاب على الطريقة البيانية التمهيد

نعرضها أنه لا يمكن استخدامها إلا إذا كان النموذج الخطي يتضمن اثنين أو ثلاثة فقط من المتغيرات القرارية حيث يصعب تمثيل أكثر من 3 أبعاد على رسم بياني ، فإذا زاد عدد المتغيرات القرارية عن ثلاثة فلا يمكن استخدام الطريقة البيانية ويتحتم حينئذ استخدام الطريقة الرياضية العامة ، ولعل هذا هو السبب في محدودية استخدام الأسلوب البياني في حل التطبيقات العملية ، إلا أن الأسلوب البياني يتميز بالسهولة والوضوح مما يساعد على التعرف على الأنواع المختلفة من الحلول لنماذج البرمجة الخطية .

وتقوم الطريقة البيانية في حل نماذج البرمجة الخطية على أساس تمثيل القيود المختلفة على شكل خطوط مستقيمة ويتم ذلك كالآتي :

أ - تحول المتباينات إلى معادلات رياضية .

ب - يتم رسم المعادلات الرياضية بخطوط مستقيمة ، وينبغي ملاحظة أن الخط المستقيم يمكن تحديده تماماً بمعرفة أي نقطتين تقعان عليه .

فإذا كان القيد على شكل معادلة فإن الحل الذي يستوفي هذا القيد ينبغي أن يقع على نفس الخط المستقيم تماماً ، أما إذا كان القيد على شكل متباينة في الصورة أصغر من أو يساوي (  $\leq$  ) فإن الحل الممكن ينبغي أن يقع تحت الخط المستقيم الممثل للقيد ، وإذا كانت المتباينة على الصورة أكبر من أو يساوي (  $\geq$  ) فإن الحل الممكن ينبغي أن يقع فوق الخط المستقيم الممثل للقيد .

وتكون المساحة المشتركة التي تحقق جميع المتباينات ( القيود الهيكلية وقيد عدم السلبية ) في نفس الوقت هي منطقة الحلول الممكنة والتي ينبغي أن يقع داخلها أو على حدودها الحل الأمثل .

ولتحديد الحل الأمثل بعد ذلك يلاحظ أن منطقة الحلول الممكنة والتي تم تحديدها تحتوي على عدد لا نهائي من النقاط الممكنة ، ولكن وجد أن النقاط الطرفية ( أي التي تقع على حدود منطقة الحلول الممكنة ) ستكون متضمنة دائما الحل الأمثل .

وبتحديد هذه النقاط الطرفية ( أو الأركان ) لمنطقة الحلول الممكنة على الرسم نعوض بها في دالة الهدف ونختار النقطة ذات القيمة الأفضل . فإذا كانت دالة الهدف تعنى تحقيق أقصى ربح ، نختار النقطة التي تحقق أكبر قيمة لدالة الهدف . أما إذا كانت دالة الهدف تعنى تحقيق أقل تكلفة ممكنة ، نختار النقطة التي تحقق أقل قيمة ممكنة لدالة الهدف . وهذه النقطة تمثل الحل الأمثل أو عدد الوحدات الواجب اختيارها من المتغير الأول ،  $x_1$  ، وعدد الوحدات الواجب اختيارها من المتغير الثاني ،  $x_2$  .

ولبيان كيفية استخدام الطريقة البيانية لحل نماذج البرمجة الخطية نقدم الأمثلة التالية :

### مثال (١) :

المطلوب إيجاد الحل البياني للنموذج الآتي :

$$\text{Max } Z = 6x_1 + 10x_2$$

بشرط أن :

$$7x_1 + 6x_2 \leq 84$$

$$2x_1 + 4x_2 \leq 40$$

$$x_1 \leq 10$$

$$x_i \geq 0, \quad (i = 1, 2).$$

### الحل :

سوف نعتبر أن الإحداثى السينى يمثل المتغير الأول  $x_1$  ،  
والإحداثى الصادى يمثل المتغير الثانى  $x_2$  ، وعليه فإن جميع النقاط  
التي تقع فى الربع الأول (الموجب) تحقق قيد عدم السلبية وهو :  
 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$  . بعد ذلك نقوم بعملية التمثيل البياني للقيد  
الهيكلى ، وذلك بتحويل المتباينات إلى معادلات ، وبعد رسم المعادلة  
بخط مستقيم نحدد فى أى جهة من هذا الخط يكون الحل ممكناً .

بالنسبة للقيد الأول : يتم تحويله إلى معادلة ليصبح كما يلى :

$$7x_1 + 6x_2 = 84$$

بفرض أن قيمة  $x_1 = 0$  فتكون قيمة  $x_2$  هى :  $x_2 = 84 \div 6 = 14$

ثم بفرض أن قيمة  $x_2 = 0$  فتكون قيمة  $x_1$  هى :  $x_1 = 84 \div 7 = 12$

وتكون النقطتان اللتان يمكن بهما رسم الخط المستقيم الذى يمثل

هذه المعادلة هما :  $(0, 14)$  ،  $(12, 0)$

بالنسبة للقيد الثانى : يتم تحويله إلى معادلة كما يلى :

$$2x_1 + 4x_2 = 40$$

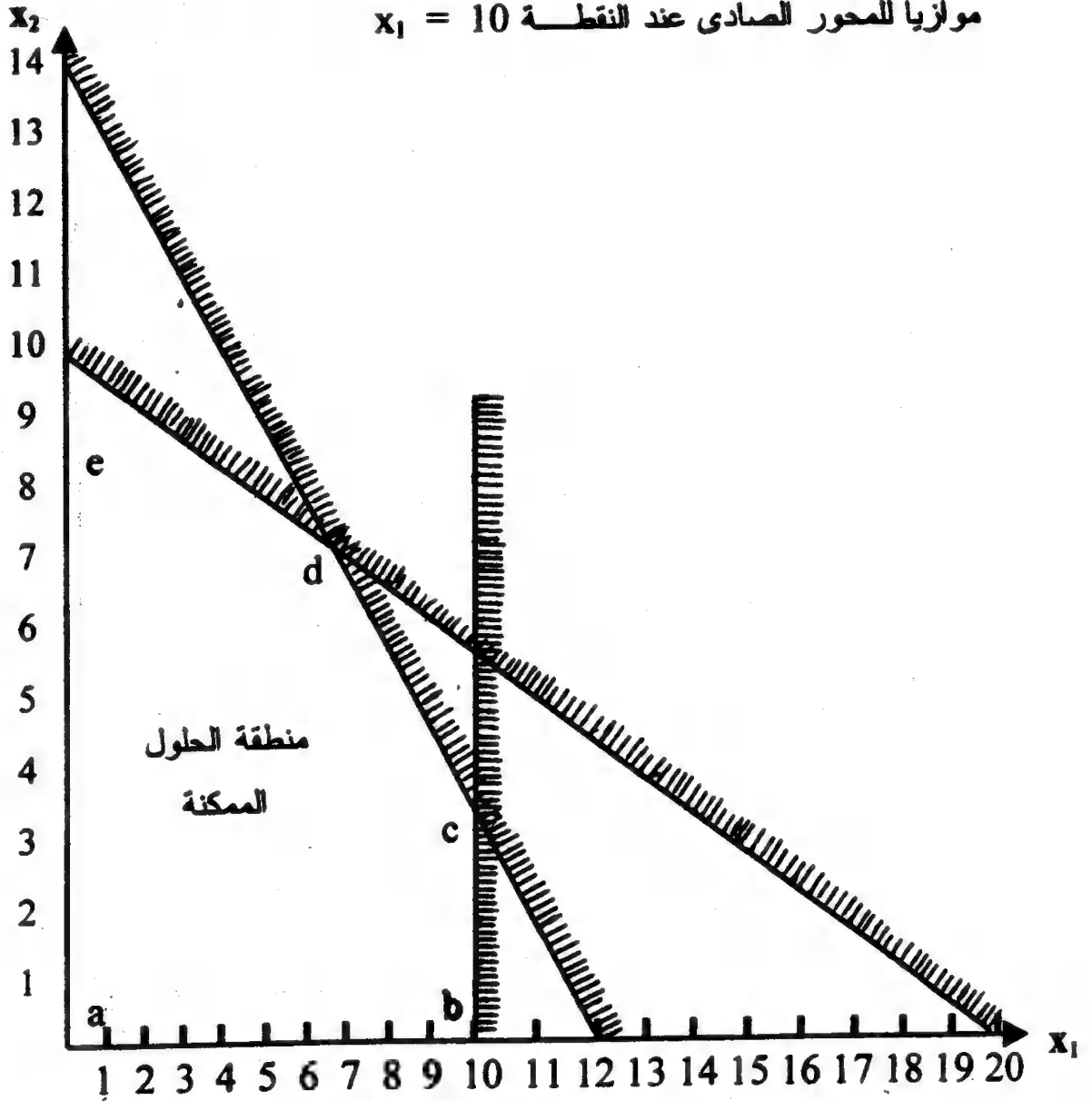
عندما تكون  $x_1 = 0$  فتكون قيمة  $x_2$  هي :  $x_2 = 40 \div 4 = 10$   
 ، عندما تكون  $x_2 = 0$  فتكون قيمة  $x_1$  هي :  $x_1 = 40 \div 2 = 20$   
 وتكون النقطتان اللتان نرسم بهما هذا الخط المستقيم الذي  
 يمثل هذه المعادلة هما :  $(0, 10)$  ،  $(20, 0)$

بالنسبة للقيود الثالث : يتم تحويله إلى معادلة فيصبح كما يلي :

$$x_1 = 10$$

يتم رسم معادلة هذا القيد بالشكل البياني بأخذ خطأ عموديا

موازيا للمحور الصادي عند النقطة  $x_1 = 10$



وتكون منطقة الحلول الممكنة هي المنطقة  $a b c d e$  وهي تضم عدداً لا نهائياً من الحلول التي تحقق كافة القيود وتعتبر كلها حلولاً ممكنة ، أما الحل الأمثل فيكون ، كما سبق أن أوضحنا ، هو إحدى النقاط الطرفية القصوى أي  $b$  أو  $c$  أو  $d$  أو  $e$  مع ملاحظة أن تستبعد النقطة  $a$  ( نقطة الأصل ) في جميع الحالات لأن هذه النقطة تعني أن قيمة  $x_1 = 0$  ، قيمة  $x_2 = 0$  وقيمة دالة الهدف  $Z = 0$  أيضاً ، أي أن العملية لم تبدأ بعد .

ولا يجاد النقطة التي تمثل الحل الأمثل ، أي التي تجعل الدالة  $Z = 6x_1 + 10x_2$  أكبر ما يمكن ، تحسب قيمة دالة الهدف عند كل نقطة من هذه النقاط الطرفية كما يتضح من الجدول الآتي :

النقطة	$(x_1, x_2)$	دالة الهدف : $Z = 6x_1 + 10x_2$
b	( 10 , 0 )	$6(10) + 10(0) = 60$
c	( 10 , 2.4 )	$6(10) + 10(2.4) = 84$
d	( 6 , 7 )	$6(6) + 10(7) = 106$
e	( 0 , 10 )	$6(0) + 10(10) = 100$

وحيث أن المطلوب هو تعظيم دالة الهدف ، فإن النقطة التي تمثل الحل الأمثل هي النقطة التي تحقق أكبر قيمة لدالة الهدف ،  $Z$  ، وهي النقطة  $d$  . وعند هذه النقطة نجد أن  $x_1^* = 6$  ،  $x_2^* = 7$  ، كما أن قيمة دالة الهدف عند هذه النقطة تساوي 106 ، وهي أقصى قيمة يمكن أن تصل إليها دالة الهدف في ظل مجموعة القيود الموضوعية .



## مثال (٢) :

أوجد بيانياً قيم  $x_1, x_2$  التي تحقق البرنامج التالي :

$$\text{Min } Z = 2x_1 + 4x_2$$

بشرط أن :

$$2x_1 + x_2 \geq 12$$

$$2x_1 + 6x_2 \geq 24$$

$$x_1 + x_2 \geq 9$$

$$x_i \geq 0, \quad (i = 1, 2)$$

## الحل :

نحول المتباينات إلى معادلات ثم نرسم كل معادلة بخط مستقيم

بعد تحديد نقطتين عليه .

$$2x_1 + x_2 = 12 \quad \text{القيد الأول :}$$

$$\text{عندما } x_1 = 0 \text{ فإن } x_2 = 12$$

$$\text{وعندما } x_2 = 0 \text{ فإن } x_1 = 6$$

وتكون النقطتان هما :  $(0, 12)$  ،  $(6, 0)$

$$2x_1 + 6x_2 = 24 \quad \text{القيد الثاني :}$$

$$\text{عندما } x_1 = 0 \text{ فإن } x_2 = 4$$

$$\text{وعندما } x_2 = 0 \text{ فإن } x_1 = 12$$

وتكون النقطتان هما :  $(0, 4)$  ،  $(12, 0)$

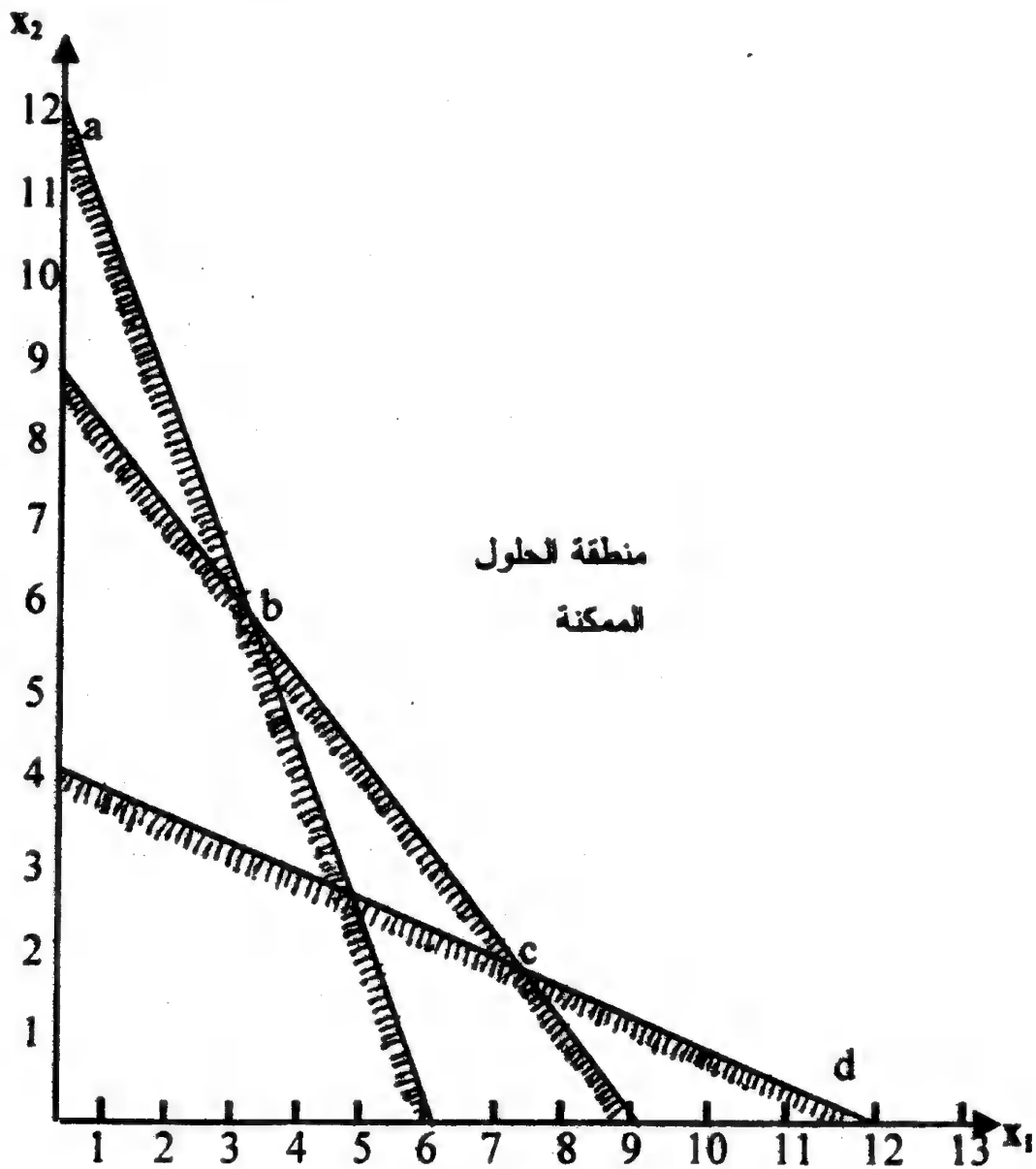
للقيد الثالث :  $x_1 + x_2 = 9$

عندما  $x_1 = 0$  فإن  $x_2 = 9$

وعندما  $x_2 = 0$  فإن  $x_1 = 9$

وتكون النقطتان هما :  $(0, 9)$  ,  $(9, 0)$

ولتمثيل النموذج بيانياً نرسم المستقيمات السابقة كما هو مبين بالشكل التالي :



وبلاحظ أن منطقة الحلول الممكنة هي  $a b c d$  إلى أعلى وتضم عدداً لا نهائياً من الحلول الممكنة ، إلا أن الحل الأمثل الذي يحقق الحد الأدنى لدالة الهدف سيكون هو إحدى النقاط الطرفية  $a$  أو  $b$  أو  $c$  أو  $d$  كما سبق أن أوضحنا .

ولإيجاد نقطة الحل الأمثل نعوض بكل نقطة من هذه النقاط في دالة الهدف كما يتضح من الجدول الآتي :

النقطة	$(x_1, x_2)$	دالة الهدف : $Z = 6x_1 + 10x_2$
a	$(0, 12)$	$2(0) + 4(12) = 48$
b	$(3, 6)$	$2(3) + 4(6) = 30$
c	$(7.5, 1.5)$	$2(7.5) + 4(1.5) = 21$
d	$(12, 0)$	$2(12) + 4(0) = 24$

كما هو واضح فإن النقطة  $c$  هي التي تحقق أدنى قيمة لدالة الهدف وتكون بذلك هي النقطة التي تمثل الحل الأمثل ، حيث :

النقطة هي :  $Z = 21$  وهي أصغر قيمة يمكن أن تصل إليها دالة الهدف في ظل مجموعة القيود الموضوعية .

مثال (٣) :

أوجد بيانياً قيم  $x_1$  ،  $x_2$  التي تحقق ما يلي :

$$\text{Max } Z = x_1 + 2x_2$$

بشروط أن :

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 &\leq 6 \\-2x_1 + x_2 &\leq 2 \\x_1 &\leq 4 \\x_i &\geq 0, \quad (i = 1, 2)\end{aligned}$$

**الحل :**

يتم تحويل المتباينات إلى معادلات ثم نرسم كل معادلة بخط مستقيم بعد تحديد نقطتين عليه كما يلي :

القيد الأول :  $x_1 + x_2 = 6$

عندما  $x_1 = 0$  فإن  $x_2 = 6$

عندما  $x_2 = 0$  فإن  $x_1 = 6$

وتكون النقطتان هما :  $(0, 6)$  ،  $(6, 0)$

القيد الثاني :  $-2x_1 + x_2 = 2$

عندما  $x_1 = 0$  فإن  $x_2 = 2$

عندما  $x_2 = 0$  فإن  $x_1 = -1$

وتكون النقطتان هما :  $(0, 2)$  ،  $(-1, 0)$

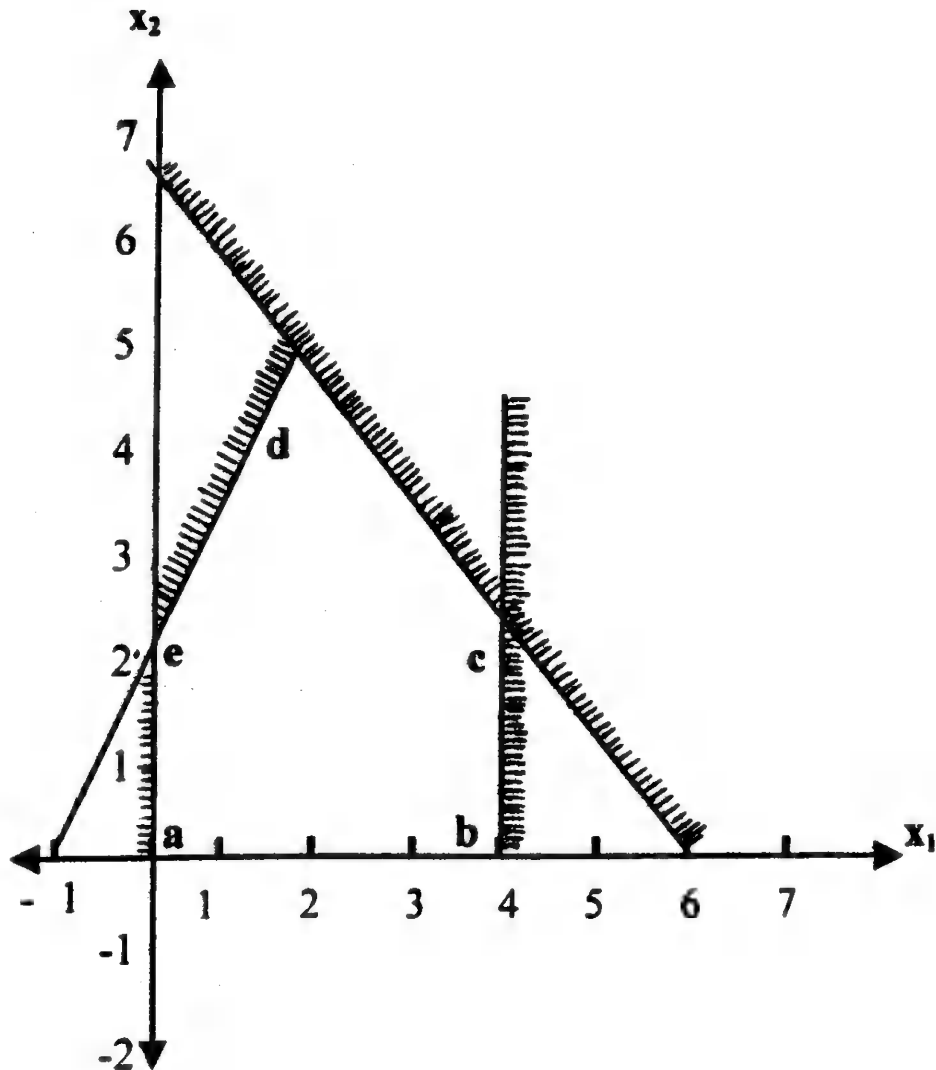
القيد الثالث :  $x_1 = 4$

يتم رسم معادلة هذا القيد برسم خطاً مستقيماً موازياً للمحور

الصادى عند النقطة  $x_1 = 4$

وبرسم المستقيمات الثلاث السابقة نحصل على الشكل البياني

التالي :



وتكون منطقة الحلول الممكنة هي المنطقة  $a b c d e$  ،  
وهي تضم عدداً لا نهائياً من الحلول الممكنة ، إلا أن الحل الأمثل  
الذي يحقق الحد الأقصى للدالة  $Z$  ، هو إحدى النقاط الطرفية  
 $b$  أو  $c$  أو  $d$  أو  $e$  ، وسوف نستبعد نقطة الأصل  $a$  ،  
كما سبق أن بينا .

و لإيجاد نقطة الحل الأمثل ، نعوض بكل نقطة من هذه النقاط  
في دالة الهدف كما يتضح من الجدول التالي :

النقطة	$(x_1, x_2)$	دالة الهدف: $Z = x_1 + 2x_2$
b	(4, 0)	$1(4) + 2(0) = 4$
c	(4, 2)	$1(4) + 2(2) = 8$
d	(1.3, 4.6)	$1(1.3) + 2(4.6) = 10.5$
e	(0, 2)	$1(0) + 2(2) = 4$

وكما هو واضح ، فإن النقطة d هي النقطة التي عندها تتحقق  
أكبر قيمة لدالة الهدف ، وبالتالي تكون هي نقطة الحل الأمثل . ويكون  
الحل الأمثل على النحو التالي :

$$Z = 10.5 \quad x_1^* = 1.3 \quad x_2^* = 4.6$$

٢ - الحل الرياضي لنموذج البرمجة الخطية ( طريقة السمبلكس )

### (Simplex Method)

مما سبق يتضح لنا أن الحل البياني لنموذج البرمجة الخطية  
بالرغم من أنه يتميز بسهولة تطبيقه كما أنه يفيد في فهم خصائص  
تركيب وحل نموذج البرمجة الخطية ، إلا أنه لا يصلح إلا في حالة  
وجود متغيرين قراريين  $(x_1, x_2)$  ويصعب استخدام هذا الأسلوب  
البياني في حالة وجود ثلاثة متغيرات قرارية  $(x_1, x_2, x_3)$  ، إذ  
يتطلب ذلك ثلاثة أبعاد على الرسم البياني ، ويستحيل استخدامه إذا زاد  
عدد المتغيرات القرارية عن ثلاثة .

ومن العرض السابق للحل البياني لنماذج البرمجة الخطية نلاحظ الحالات الآتية للحلول المختلفة للنموذج :

١ - أى نموذج برمجة خطية يكون له - بوجه عام - عدد لا نهائى من الحلول المسموح بها ( أى نقطة تقع داخل أو على حدود منطقة الحلول الممكنة ) .

٢ - من بين هذا العدد اللانهائى من الحلول المسموح بها يوجد عدد محدود من الحلول الأساسية المسموح بها ( حلول النقاط الطرفية ) .

٣ - أحد الحلول الأساسية المسموح بها والذي يجعل دالة الهدف أكبر ( أو أصغر ) ما يمكن يسمى بالحل الأمثل .

لذلك وبسبب محدودية استخدام الأسلوب البياني فى حل نماذج البرمجة الخطية فقد تمكن الباحث الرياضى دانتزج Dantzig من تقديم طريقة السمبلكس Simplex Method باعتبارها الطريقة العامة الوحيدة التى يمكن استخدامها فى حل كافة نماذج البرمجة الخطية مهما كان عدد المتغيرات القرارية بها . وتتميز هذه الطريقة بالآتى :

١ - أنها مبنية على أساس جبرى مما أدى إلى إمكانية تطبيقها فى مختلف الحالات .

٢ - أنها لا تشترط حساب جميع الحلول الأساسية المسموح بها حيث أنها تبحث دائماً عن حل أفضل من الحل الذى يتم الحصول عليه حتى تصل إلى الحل الأمثل .

٣ - أن هذه الطريقة تستخدم نفس القواعد للانتقال من أى حل إلى أفضل حل .

وتمثل عمليات الانتقال هذه المراحل المتتالية اللازمة للوصول إلى الحل الأمثل .

ويوجد نوعان أساسيان من نماذج البرامج الخطية على أساس طريقة الحل المستخدمة لكل منهما وهما :

**النوع الأول :** فى هذا النموذج تكون جميع القيود الهيكلية على صورة أصغر من أو تساوى أى على الصورة  $\leq$  ، وجميع قيم الثوابت ، فى نفس الوقت ، موجبة . وطريقة السمبلكس التى تستخدم لحل هذا النوع من النماذج تسمى " طريقة السمبلكس الأساسية " .

**النوع الثانى :** فى هذا النموذج تكون كل أو بعض أو أحد القيود على صورة أكبر من أو يساوى أو على صورة يساوى ، أى على الصورة  $\geq$  أو  $=$  ، وطريقة السمبلكس التى تستخدم لحل هذا النوع من النماذج تسمى " طريقة مبدول السمبلكس " . وهذه الطريقة تختلف ، بالطبع ، فى بعض قواعدها وخطواتها عن طريقة السمبلكس العادية ، كما سنرى فيما بعد .

**أولاً : طريقة السمبلكس الأساسية** *Primal Simplex Method*

يتم الحصول على الحل الأمثل وفقاً لطريقة السمبلكس الأساسية من خلال الخطوات الآتية :



١ - تحويل جميع القيود الهيكلية إلى معادلات بإضافة متغير متمم موجب الإشارة لكل قيد .

٢ - اختيار حل مبدئي أساسى مسموح به ، وفى معظم الأحوال يتم اختيار نقطة الأصل كحل مبدئي ، حيث تكون المتغيرات المتممة المضافة هي المتغيرات الأساسية ، أى اللاصفريّة ، بينما تكون المتغيرات القرارية غير أساسية ، أى صفريّة وتكون قيمة دالة الهدف مساوية للصفر فى هذه الحالة .

٣ - فى كل مرحلة من مراحل الحل تكتب دالة الهدف وكذلك القيود بدلالة المتغيرات الأساسية ثم تختبر أمثلية الحل الذى لدينا ، فإذا كان هو الحل الأمثل تنتهى العملية ، وإن لم يكن كذلك ننتقل إلى حل آخر أفضل منه .

ويتم تكرار هذه الخطوة حتى نصل فى النهاية إلى الحل الأمثل .

فعلى سبيل المثال ، إذا كان لدينا نموذج خطى يشتمل على

متغيرين  $(x_2, x_1)$  وثلاثة قيود هيكلية على الصورة :

$$\text{Max } Z = t_1 x_1 + t_2 x_2$$

بشروط أن :

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 \leq c_1$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 \leq c_2$$

$$a_{31} x_1 + a_{32} x_2 \leq c_3$$

$$x_i \geq 0 , \quad (i = 1, 2)$$

فيتم تحويل القيود الهيكلية إلى معادلات وذلك بإضافة متغير  
 متمم لكل قيد : المتغير  $x_3$  للقيد الأول والمتغير  $x_4$  للقيد  
 الثانى والمتغير  $x_5$  للقيد الثالث على النحو التالى :

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + x_3 &= c_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + x_4 &= c_2 \\ a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + x_5 &= c_3 \end{aligned}$$

ويكون جدول الحل المبدئى لهذه المشكلة كما يلى :

الثوابت	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	المتغيرات الأساسية
$c_1$	$a_{11}$	$a_{12}$	1	0	0	$x_3$
$c_2$	$a_{21}$	$a_{22}$	0	1	0	$x_4$
$c_3$	$a_{31}$	$a_{32}$	0	0	1	$x_5$
0	$t_1$	$t_2$	0	0	0	$-Z$

ويمثل هذا الحل المبدئى ، الممكن فنياً وغير المرغوب فيه  
 - دائماً - اقتصادياً ، نقطة البدء فى طريقة السمبلكس .

٤ - عند الانتقال من حل أساسى مسموح به إلى حل آخر لابد من  
 تحويل أحد المتغيرات غير الأساسية إلى متغير أساسى ويسمى  
 بالمتغير الداخلى ، وكذلك تحويل أحد المتغيرات الأساسية إلى  
 متغير غير أساسى يسمى بالمتغير الخارج .

ويتم تحديد كلاً من المتغير الداخل والمتغير الخارج وفقاً لقاعدة معينة حتى نضمن الانتقال إلى حل أفضل ومسموح به .

#### اختيار المتغير الداخل

يتم اختيار المتغير الداخل على أساس أنه المتغير الأكثر إيجابية في معادلة دالة الهدف ، فإذا كان المطلوب هو إيجاد الحد الأقصى لدالة الهدف فيتم اختيار هذا المتغير على أساس أكبر المعاملات الموجبة للمتغيرات غير الأساسية في الصف ( $Z -$ ) في جدول الحل . أما إذا كان المطلوب هو إيجاد الحد الأدنى لدالة الهدف فيتم اختيار المتغير الداخل على أساس أكبر معامل سالب للمتغيرات غير الأساسية في الصف ( $Z -$ ) في جدول الحل . وفي حالة وجود أكثر من معامل متساو ، في أي من حالتى التعظيم والتصغير ، نختار أحدهما عشوائياً .

#### اختيار المتغير الخارج

يتم اختيار المتغير الخارج بحيث يكون الحل الجديد ، مسموحاً به ، ويتحقق ذلك باختيار المتغير الأساسى الذى تصبح قيمته صفر قبل غيره عندما تزداد قيمة المتغير الداخل . والقاعدة التى يتم على أساسها اختيار المتغير الخارج هى :

حساب خارج قسمة الثوابت (عناصر العمود الأخير فى الجدول) على العناصر المقابلة لها فى عمود المتغير الداخل الموجبة الإشارة فقط (وذلك بعد استبعاد العناصر السالبة أو التى تساوى صفر من هذا العمود ) . ويتم اختيار أقل خارج قسمة ليصبح المتغير الأساسى الذى

يقابلها هو المتغير الخارج ( أى الذى سوف يتحول فى المرحلة التالية إلى متغير غير أساسى ) . وإذا لم يوجد فى عمود المتغير الداخلى أى عنصر موجب الإشارة فيكون النموذج ليس له حل ، وتطبق هذه القاعدة سواء فى حالات الحد الأقصى أو الحد الأدنى لدالة الهدف .

وعند الانتقال من حل أساسى مسموح به إلى حل آخر أفضل منه، إذا اعتبرنا أن عمود المتغير الداخلى هو العمود المحورى ، وصف المتغير الخارج هو الصف المحورى ، بينما نعتبر أن العنصر الموجود فى الخلية التى يتقاطع فيها العمود المحورى مع الصف المحورى هو العنصر المحورى ، فإن القواعد التى تحكم عملية الانتقال من مرحلة إلى أخرى فى الحل هى :

- ١ - العمود المحورى : تصبح جميع عناصره فى الحل الجديد أصفار فيما عدا العنصر المحورى يصبح مساوياً للواحد الصحيح .
- ٢ - الصف المحورى : ينقل بالجدول الجديد كما هو بعد قسمة كل عنصر من عناصره على العنصر المحورى .
- ٣ - باقى العناصر تحسب وفقاً للقاعدة الآتية :

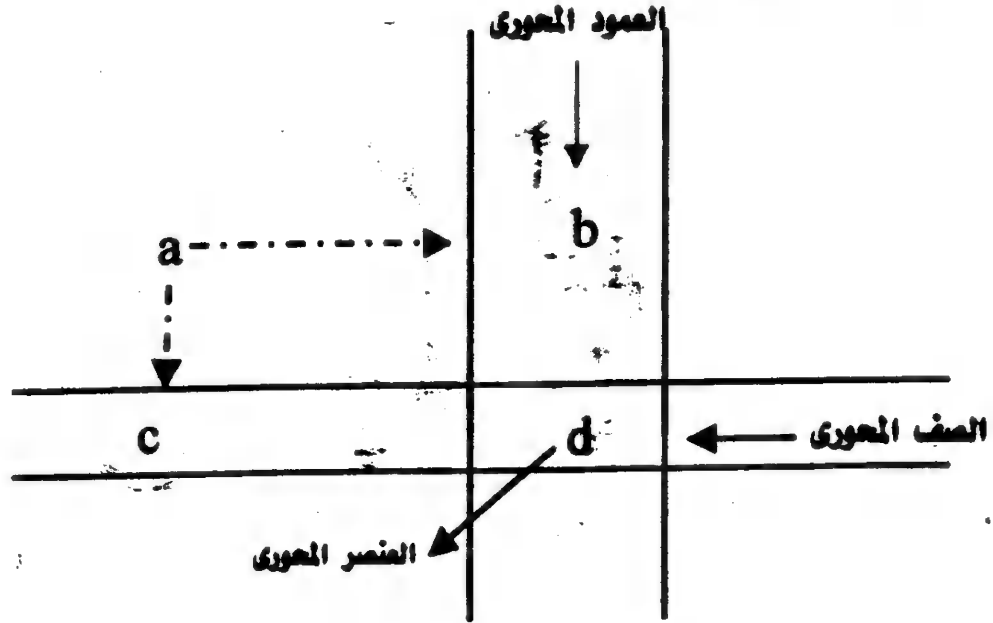
العنصر الجديد = العنصر الأصلى

العنصر المقابل فى العمود المحورى × العنصر المقابل فى الصف المحورى

العنصر المحورى

فإذا فرضنا فى إحدى مراحل الحل الأساسى الممكن أن العنصر  
الأصلى هو  $a$  وأن العنصر المقابل له فى العمود المحورى هو  $b$

والعنصر المقابل له فى الصف المحورى هو c وأن العنصر المحورى (الناتج من تلاقى الصف المحورى مع العمود المحورى) هو d ، كما يتضح من الشكل التالى :



شكل ( ١ - ١ )

فإن العنصر الجديد - فى المرحلة التالية من مراحل الحل - للعنصر الأصى a والذي نرسم له بالرمز a' بحسب كما يلى :

$$a' = a - \frac{b \times c}{d}$$

اختبار الأمثلة :-

فى كل مرحلة من مراحل الحل ابتداء من مرحلة الحل المبني يجرى اختبار الأمثلة للتأكد من أن الحل المتاح هو الحل الأمثل أم أنه حل أساسى مسموح به ويمكن تحسينه فى مرحلة أخرى لاحقة على النحو التالى :

إذا كان المطلوب هو إيجاد الحد الأقصى لدالة الهدف :

إذا كانت إشارات معاملات دالة الهدف ،  $Z$  ، فى الصف الأخير جميعها سالبة بالنسبة للمتغيرات غير الأساسية وأصفار بالنسبة للمتغيرات الأساسية نكون قد وصلنا إلى الحل الأمثل ، أما فى حالة وجود معاملات موجبة الإشارة للمتغيرات غير الأساسية فى صف دالة الهدف ،  $Z$  ، فإن ذلك يعنى أن الحل الحالى ليس هو الحل الأمثل وهناك إمكانية لتحسينه .

إذا كان المطلوب هو إيجاد الحد الأدنى لدالة الهدف :

إذا كانت إشارات معاملات دالة الهدف ،  $Z$  ، فى الصف الأخير من الجدول جميعها موجبة بالنسبة للمتغيرات غير الأساسية وأصفار بالنسبة للمتغيرات الأساسية نكون قد وصلنا إلى الحل الأمثل المنشود ، بينما وجود معاملات سالبة الإشارة للمتغيرات غير الأساسية فى صف دالة الهدف يعنى أن الحل الجارى ليس هو الحل الأمثل ، ولا بد من الانتقال إلى مرحلة تالية لتحسينه .

#### مثال (٤) :

حل البرنامج الخطى التالى مستخدماً طريقة السمبلكس .

$$\text{Max } Z = 40 x_1 + 50 x_2$$

بشروط أن :

$$x_1 + 2 x_2 \leq 12$$

$$5 x_1 + 4 x_2 \leq 30$$

$$3 x_1 + x_2 \leq 15$$

$$x_i \geq 0 ,$$

$$(i = 1, 2)$$

## الحل :

نقوم أولاً بتحويل المتباينات إلى معادلات وذلك بإضافة متغيرات متممة

موجبة وهي :  $x_3$  ,  $x_4$  ,  $x_5$  \*بواقع متغير متمم لكل قيد :

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 12$$

$$5x_1 + 4x_2 + x_4 = 30$$

$$3x_1 + x_2 + x_5 = 15$$

ويكون الجدول الذي يمثل الحل المبدئي هو :

الجدولة الأولى :

المتغيرات الأساسية	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	الثوابت
$x_3$	1	2	1	0	0	12
$x_4$	5	4	0	1	0	30
$x_5$	3	1	0	0	1	15
- Z	40	50	0	0	0	0

في هذا الحل المبدئي يلاحظ أن :

المتغيرات الأساسية هي المتممات المضافة وهي :  $x_3 = 12$  ،

$x_4 = 30$  ،  $x_5 = 15$  .

المتغيرات غير الأساسية هي :  $x_1 = 0$  ،  $x_2 = 0$  .

قيمة دالة الهدف هي :  $Z = 0$  .

### اختبار الأمثلة :

حيث أن معاملي المتغيرين غير الأساسيين في صف دالة الهدف ( - Z ) ، هما : 40 , 50 وكلاهما قيمة موجبة ، فيكون الحل المبدئي ليس هو الحل الأمثل وهناك إمكانية لتصويته ، وبما أن المعامل 50 في صف دالة الهدف هو أكبر معامل موجب ، فيكون المتغير  $x_2$  هو المتغير الداخل ويكون عمود  $x_2$  بالتالي هو العمود المحوري .

ولتحديد الصف المحوري نقوم بقسمة عناصر عمود التوابت ( أى العمود الأخير في الجدول ) على العناصر المقابلة لها في العمود المحوري والموجبة فقط فنحصل على :

$$\frac{15}{1} = 15 , \quad \frac{30}{4} = 7.5 , \quad \frac{12}{2} = 6$$

وحيث أن أصغر خارج قسمة هو القيمة 6 والتي تقابل المتغير  $x_3$  فيكون  $x_3$  هو المتغير الخارج وبالتالي فإن صف  $x_3$  يكون هو الصف المحوري ، ونتيجة لتلك الصف المحوري ( صف  $x_3$  ) مع العمود المحوري ( عمود  $x_2$  ) ينشأ العنصر المحوري وهو القيمة 2 .

### الجولة الثانية :

ثم ننتقل بعد ذلك إلى إحلال المتغير الداخل  $x_2$  محل المتغير الخارج  $x_3$  مع تطبيق القواعد التحويلية التي سبق الإشارة إليها فنحصل على الجدول التالي :



المتغيرات الأساسية	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	الثوابت
$x_2$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	0	6
$x_4$	3	0	-2	1	0	6
$x_5$	$\frac{5}{2}$	0	$-\frac{1}{3}$	0	1	9
-Z	15	0	-25	0	0	-300

هذا الجدول يعطى الحل الأساسى المسموح به التالى :

المتغيرات الأساسية هى :

$$x_5 = 9, \quad x_4 = 6, \quad x_2 = 6$$

المتغيرات غير الأساسية هى :

$$x_1 = x_3 = 0$$

قيمة دالة الهدف هى :  $Z = 300$

حيث أمكن تحقيق بعض الربح لأن المتغير  $x_2$  أصبح متغيراً أساسياً

اختبار الأمثلية :

بتطبيق اختبار الأمثلية على الجدول الثانى نجد أن هذا الحل

الأساسى المسموح به ليس هو الحل الأمثل وذلك لوجود معامل موجب

الإشارة فى صف دالة الهدف لأحد المتغيرات غير الأساسية وهو  $x_1$  ،

أى أن هذا الحل يقبل التحسين .

بما أن المتغير  $x_1$  هو المتغير الوحيد الذى له معامل موجب فى صف دالة الهدف ، لذا يتعين اختياره كمتغير داخل ويكون عمود  $x_1$  بالتالى هو العمود المحورى .

لتحديد الصف المحورى ، فكما سبق أن بينا ، نقسم عناصر عمود الثوابت على عناصر العمود المحورى الموجبة المناظرة لها فنحصل على :

$$9 \div \frac{5}{2} = 3.6 , 6 \div 3 = 2 , 6 \div \frac{1}{2} = 12$$

وأقل خارج قسمة هو القيمة 2 وتتأظر صف  $x_4$  ، وعليه ، فيكون المتغير  $x_4$  هو المتغير الخارج ويكون صف  $x_4$  هو الصف المحورى ، والعنصر المحورى فى هذه المرحلة هو القيمة 3 ، وننتقل إلى الجولة التالية مع تطبيق نفس القواعد التحويلية .

الجولة الثالثة :

المتغيرات الأساسية	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	الثوابت
$x_2$	0	1	$\frac{5}{6}$	$-\frac{1}{6}$	0	5
$x_1$	1	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	2
$x_5$	0	0	$\frac{7}{6}$	$-\frac{5}{6}$	1	4
- Z	0	0	-15	-5	0	-330

من الجدول السابق ينتج أن :

المتغيرات الأساسية هي :

$$x_1 = 2 , \quad x_2 = 5 , \quad x_3 = 4$$

المتغيرات غير الأساسية هي :

$$x_3 = x_4 = 0$$

قيمة دالة الهدف هي :  $Z = 330$

اختبار الأمثلية :

بتطبيق اختبار الأمثلية على الجدول الثالث نجد أن لا يوجد معاملات

موجبة في صف دالة الهدف ، أي أن معاملات المتغيرات غير الأساسية كلها

أصبحت سالبة وبذلك يكون الحل الجارى هو الحل الأمثل وهو :  $x_1^* = 2$  ،

$x_2^* = 5$  ، وتكون أكبر قيمة لدالة الهدف هي :  $Z = 330$  .

مثال (٥) :

استخدم طريقة السمبلكس فى إيجاد الحل الأمثل للنموذج

الخطى التالى :

$$\text{Min } Z = - 26 x_1 - x_2 - 2 x_3$$

بشرط أن :

$$12 x_1 + x_2 + x_3 \leq 30$$

$$30 x_1 + x_2 - 4 x_3 \leq 45$$

$$2 x_1 + 3 x_2 \leq 2$$

$$x_i \geq 0 , (i = 1, 2, 3)$$

## الحل :

نحول المتباينات إلى معادلات وذلك بإضافة متغير متمم لكل قيد :

$$12x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 30$$

$$30x_1 + x_2 - 4x_3 + x_5 = 45$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_6 = 2$$

ويكون الحل المبدئي والذي يمثل الجولة الأولى من الحل كما يلي :

### الجولة الأولى :

المتغيرات الأساسية	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	الثوابت
$x_4$	12	1	1	1	0	0	30
$x_5$	30	1	-4	0	1	0	45
$x_6$	2	3	0	0	0	1	2
-Z	-26	-1	-2	0	0	0	0

حيث أن المطلوب هو جعل دالة الهدف ، Z ، حد أقصى وحيث

أن معاملات المتغيرات غير الأساسية في الصف (- Z) بالجدول

السابق كلها سالبة الإشارة فيكون الحل المبدئي الحالي ليس هو الحل

الأمثل .

وحيث أن المعامل -26 في الصف (- Z) هو أكبر معامل

سالب فيكون المتغير  $x_1$  هو المتغير الداخل ويكون عموده هو

العمود المحوري .

لتحديد المتغير الخارج ، نقسم عناصر عمود الثوابت على عناصر المناظرة لها في العمود المحوري الموجبة فقط فنحصل على :

$$\frac{2}{2} = 1 , \quad \frac{45}{30} = 1.5 , \quad \frac{30}{12} = 2.5$$

وحيث أن أصغر خارج قسمة هو القيمة 1 والتي تقابل المتغير  $x_6$  ، فيكون المتغير  $x_6$  هو المتغير الخارج ويكون صفه هو الصف المحوري . ونقطة تلاقي الصف المحوري مع العمود المحوري هي القيمة 2 وتكون هي العنصر المحوري ، وننتقل بعد ذلك إلى الجولة التالية :

الجولة الثانية :

المتغيرات الأساسية	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	الثوابت
$x_4$	0	-17	1	1	0	-6	18
$x_5$	0	-44	-4	0	1	-15	15
$x_1$	1	$\frac{3}{2}$	0	0	0	$\frac{1}{2}$	1
-Z	0	38	-2	0	0	13	26

بتطبيق اختبار الأمثلة على هذا الحل نجد أنه ليس هو الحل الأمثل نظراً لوجود معاملات سالبة في الصف (-Z) .

وحيث أن المعامل  $(-2)$  هو المعامل السالب الوحيد في الصف  $(-Z)$  فيكون المتغير  $x_3$  هو المتغير الداخل ويكون عموده هو العمود المحوري ، ثم بقسمة عناصر عمود الثوابت على العناصر المناظرة لها في العمود المحوري الموجبة فقط ( حيث لانقسم على العناصر سالبة الإشارة أو العناصر ذات القيمة صفر ) فينشأ لدينا خارج القسمة الوحيد  $18 \div 1 = 18$  ، فيكون المتغير الخارج هو المتغير  $x_4$  ويكون الصف الأول من الجدول هو الصف المحوري ، ويكون بالتالي العنصر المحوري هو القيمة 1 ، وننتقل بعد ذلك الجولة التالية .

#### الجولة الثالثة :

المتغيرات الأساسية	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	الثوابت
$x_3$	0	-17	1	1	0	-6	18
$x_5$	0	-112	0	4	1	-39	87
$x_1$	1	$\frac{3}{2}$	0	0	0	$\frac{1}{2}$	1
$-Z$	0	4	0	2	0	1	62

بتطبيق اختبار الأمثلية على الجدول السابق نجد أن معاملات المتغيرات غير الأساسية وهي :  $x_2$  ,  $x_4$  ,  $x_6$  في الصف  $(-Z)$

أصبحت كلها موجبة الإشارة فيكون الحل الحالي هو الحل الأمثل وهو على النحو التالي :

$$x_5^* = 87 \quad , \quad x_3^* = 18 \quad , \quad x_1^* = 1$$

وأصغر قيمة لدالة الهدف هي :  $Z = -62$

### ثانياً : طريقة مبدول السمبلكس Dual Simplex Method

رأينا في الجزء السابق كيفية إمكان تطبيق طريقة السمبلكس الأساسية لحل مشاكل تعظيم الأرباح حيث تكون القيود الهيكلية المرتبطة بها في الغالب في الصورة أصغر من أو يساوى كما في مثال (٤) . ويمكن استخدام طريقة السمبلكس الأساسية أيضاً في حل مشاكل تخفيض التكاليف بنفس الطريقة كما في المثال (٥) حيث تركز القيود الهيكلية المرتبطة بها في الغالب على مستويات الجودة والمواصفات المطلوبة وبالتالي تكون في الصورة أكبر من أو تساوى.

وكما رأينا سابقاً ، عندما تكون جميع القيود الهيكلية في الصورة أصغر من أو تساوى وكانت جميع القيم المطلقة موجبة ، يتم إدخال متغيرات متممة موجبة لتحويل المتباينات إلى معادلات وتكون نقطة الأصل هي الحل المبني ( على أساس أنها أحد الحلول الأساسية المسموح بها ) . ولكن عندما تكون كل أو بعض أو أحد القيود الهيكلية في صورة أكبر من أو يساوى أو في صورة يساوى ، فإن نقطة الأصل قد لا تمثل حلاً أساسياً ، كما أنها قد لا تكون حلاً مسموحاً به ، إذ أن المتغيرات المتممة التي يتم إدخالها قد تكون سالبة الإشارة.

ويعالج هذا الوضع بإضافة متغيرات صناعية Artificial Variables موجبة الإشارة بخلاف المتغيرات المتممة السالبة ، وتسمى طريقة الحل المستخدمة في هذه الحالة " طريقة السمبلكس على مرحلتين " Two - Phase Simplex Method ، ففي المرحلة الأولى يتم التخلص من المتغيرات الصناعية أى تخفيض قيمتها إلى أصفار ، فإذا تم ذلك تبدأ المرحلة الثانية وفيها يتم تحسين الحل الأساسى المسموح به إلى أن نصل إلى الحل الأمثل . أما إذا كانت هذه المتغيرات الصناعية لا تصل جميعها إلى أصفار فى المرحلة الأولى فيعتبر ذلك دليلاً على عدم وجود حل أساسى مسموح به للنموذج الأصلى .

ويعاب على طريقة السمبلكس على مرحلتين أنها مرهقة حسابياً وبصاحبها تعقيدات مرتبطة بالمتغيرات الصناعية خصوصاً إذا اشتمل النموذج الأصلى على عدد كبير من المتغيرات القرارية والقيود الهيكلية . لهذا سوف يكتفى المؤلف هنا بتقديم طريقة بديلة ، تعالج نفس المواقف التى تعالجها طريقة السمبلكس على مرحلتين ، حيث يشتمل النموذج الأصلى على قيود هيكلية فى صورة أكبر من أو يساوى أو فى صورة يساوى ، ولكن بسهولة حسابية أكثر وفى وقت أقل ، وتسمى هذه الطريقة " طريقة مبدول السمبلكس " .

وفى طريقة مبدول السمبلكس يتم تحويل القيود الموجودة على صورة أكبر من أو يساوى إلى صورة أصغر من أو يساوى وذلك بضرب طرفى المتباينة فى 1 - ، أما القيود الموجودة على شكل



أصغر من أو يساوى فنتترك كما هى ، فى حين أن القيود الموجودة على الصورة - ، فيستبدل كل قيد منها بقيدين : أحدهما على صورة أصغر من أو يساوى ويترك كما هو ، والآخر على صورة أكبر من أو يساوى ثم يضرب طرفيه فى 1 - ليتحول إلى الصورة أصغر من أو يساوى . ويلاحظ أن عدد القيود الهيكلية بالنموذج فى هذه الحالة سوف تزداد بواقع قيد مقابل كل قيد هيكلى على الصورة - ، بعد ذلك يضاف لكل قيد متغير متمم موجب الإشارة لتحويل المتباينات إلى معادلات ، تماماً مثل ما يحدث فى طريقة السمبلكس الأساسية ، وبالتالي تتميز هذه الطريقة بأنها تستغنى كلية عن المتغيرات الصناعية. وتبدأ هذه الطريقة بحلول أساسية غير مسموح بها ثم تتجه إلى الإمكانية ومنها إلى الأمثلية .

ويوجد عدة اختلافات بين طريقة مبدول السمبلكس وطريقة السمبلكس الأساسية فيما يتعلق بقواعد اختيار الأمثلية واختيار المتغير الخارج واختيار المتغير الداخل عند الانتقال من مرحلة إلى مرحلة أخرى فى الحل .

ففى طريقة مبدول السمبلكس يتبع الآتى فى الحالات التالية :

#### ١ - اختيار المتغير الخارج

تبدأ هذه الطريقة بتحديد المتغير الخارج على أساس أنه المتغير الأساسى الذى يقابل أكبر قيمة سالبة فى ثوابت القيود ، ويكون صف ذلك المتغير هو الصف المحورى ، ويستوى فى ذلك ، الحد الأقصى

أو الحد الأدنى لدالة الهدف (بينما يبدأ الحل في طريقة السمبلكس الأساسية - كما رأينا - بتحديد المتغير الداخل أي المتغير غير الأساسي والمطلوب تحويله في المرحلة التالية إلى متغير أساسي) .

## ٢ - اختيار المتغير الداخل :

ثم يلي ذلك تحديد المتغير الداخل أي المتغير غير الأساسي والذي سوف يصبح أساسياً في المرحلة التالية من مراحل الحل وذلك بقسمة معاملات صف دالة الهدف على معاملات المناظرة لها بالصف المحوري الذي سبق تحديده ، السالبة فقط ( وبالتالي نتجاهل القيم الموجبة والقيم ذات القيمة صفر لمعاملات الصف المحوري ) ، ونختار المتغير الذي يقابل أقل خارج قسمة - بفض النظر عن إشارات خارج القسمة - فيكون هو المتغير الداخل في المرحلة التالية ويكون بالتالي عمود ذلك المتغير هو العمود المحوري .

تستمر جولات الحل إلى أن تصبح المتغيرات الأساسية كلها ذات قيم موجبة الإشارة في العمود الأخير من الجدول وهو عمود الثوابت فيصبح الحل في هذه الحالة حلاً مسموحاً به ( أي حلاً ممكناً ) .

## ٣ - اختبار الأمثلية :

بعد أن يصبح الحل الذي تم التوصل إليه حلاً مسموحاً به ( أي حلاً ممكناً ) يجرى اختبار الأمثلية وفقاً لقواعد طريقة السمبلكس الأساسية للتأكد من أن الحل المتاح هو الحل الأمثل أم أنه حل أساسي

مسموح به ويمكن تحسينه في مرحلة لاحقة - كما سبق أن بينا - على النحو التالي :

أ - إذا كان المطلوب هو إيجاد الحد الأقصى لدالة الهدف :

فإذا كانت إشارات معاملات دالة الهدف ،  $Z$  ، في الصف الأخير جميعها سالبة أو بعضها أو أحدها قيمتها تساوى صفر بالنسبة للمتغيرات غير الأساسية ، بينما قيمة تلك المعاملات تساوى أصفار بالنسبة للمتغيرات الأساسية نكون قد وصلنا إلى الحل الأمثل .

ب - إذا كان المطلوب هو إيجاد الحد الأدنى لدالة الهدف :

فإذا كانت إشارات معاملات دالة الهدف ،  $Z$  ، في الصف الأخير من الجدول جميعها موجبة أو بعضها أو أحدها قيمتها تساوى صفر بالنسبة للمتغيرات غير الأساسية ، بينما قيمة معاملات المتغيرات الأساسية في الصف نفسه تساوى أصفار نكون قد وصلنا إلى الحل الأمثل المنشود .

وفي حالة ما إذا كانت معاملات الصف المحورى الذى تم ترشيحه غير سالبة ، مع وجود بعض للقيم السالبة فى عمود الثوابت ، فإن المشكلة الأصلية لن يكون لها حلاً أساسياً مسموحاً به .

أما باقى القواعد التحويلية التى سبق تقديمها عند عرضنا لطريقة السمبلكس الأساسية فتظل كما هى وذلك من حيث :

١ - للعمود المحورى : تصبح جميع عناصره - فى الحل الجديد - أصفار فيما عدا العنصر المحورى يصبح مساوياً (1) .

٢ - الصف المحوري : ينقل - بالجدول الجديد - كما هو بعد قسمة كل عنصر من عناصره على العنصر المحوري .

٣ - باقى العناصر تحسب وفقاً للعلاقة التالية :

العنصر الجديد = العنصر الأصلي

العنصر المقابل فى الصف المحوري = العنصر المقابل فى الصف المحوري

العنصر المحوري

مثال (٦) :

استخدم طريقة السمباكس فى حل النموذج التالى

$$\text{Min } Z = 60x_1 + 30x_2$$

بشروط أن :

$$x_1 + x_2 \geq 8$$

$$6x_1 + 4x_2 \geq 12$$

$$x_1 \leq 20$$

$$x_i \geq 0, \quad (i = 1, 2)$$

الحل :

نبدأ أولاً بتحويل كل من القيد الأول والثانى إلى الصورة أصغر من أو يساوى وذلك بضرب طرفى كل منهما فى (-1) ، أما القيد الثالث فيترك كما هو لأنه أصلاً على الصورة أصغر من أو يساوى .

$$\begin{aligned} -x_1 - x_2 &\leq -8 \\ -6x_1 - 4x_2 &\leq -12 \\ x_1 &\leq 20 \end{aligned}$$

ثم نضيف لكل قيد متغير مقيم موجب الإشارة ليتحول من متباينة إلى معادلة كما يلي :

$$\begin{aligned} -x_1 - x_2 + x_3 &= -8 \\ -6x_1 - 4x_2 + x_4 &= -12 \\ x_1 + x_5 &= 20 \end{aligned}$$

يظهر قيم سالبة في عمود الثوابت ، لذا فإننا نستخدم طريقة مبدول السمبلكس لحل النموذج ، ونستمر جولات الحل على النحو التالي :

الجولة الأولى :

المتغيرات الأساسية	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	الثوابت
$x_3$	-1	-1	1	0	0	-8
$x_4$	-6	-4	0	1	0	-12
$x_5$	1	0	0	0	1	20
-Z	60	30	0	0	0	0

في هذا الحل المبدئي نجد أن :

المتغيرات الأساسية هي المتممات المضافة وهي :

$$x_5 = 20 , x_4 = -12 , x_3 = -8$$

المتغيرات غير الأساسية هي :  $x_2 = 0 , x_1 = 0$

### اختبار الأمثلية :

حيث أن بعض معاملات المتغيرات الأساسية في عمود الثوابت لها قيمة سالبة لذلك فإن الحل الحالي غير مسموح به (أو غير ممكن) ، ويكون الهدف في هذه المرحلة هو تحويل الحل من حل غير مسموح به إلى حل مسموح به . لذلك سوف نختار المتغير الأساسي الذي له أكبر معامل سالب في عمود الثوابت وهو المتغير  $x_4$  كمتغير خارج ويكون صف  $x_4$  هو الصف المحورى . ولتحديد المتغير الداخل يتم قسمة معاملات دالة الهدف الموجودة بالصف الأخير من الجدول ( أى صف  $(-Z)$  ) على العناصر المناظرة لها بالصف المحورى السالبة فقط ( مع تجاهل الإشارة الناتجة لخارج القسمة ) كما يلي :

$$30 \div (-4) = -7.5 , \quad 60 \div (-6) = -10$$

وحيث أن أقل خارج قسمة - بعد تجاهل الإشارة (-) هو القيمة 7.5 والذي يقابل المتغير  $x_2$  فيكون  $x_2$  هو المتغير الداخل ويكون عمود  $x_2$  هي العمود المحورى وتكون القيمة  $(-4)$  هي العنصر المحورى .

## الجولة الثانية :-

يتم إحلال المتغير  $x_2$  محل المتغير  $x_4$  وتطبق نفس القواعد للتحويلية التي سبق الإشارة إليها

المتغيرات الأساسية	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	الثوابت
$x_3$	$\frac{1}{2}$	0	1	$-\frac{1}{4}$	0	-5
$x_2$	$\frac{3}{2}$	1	0	$-\frac{1}{4}$	0	3
$x_5$	1	0	0	0	1	20
-Z	15	4	0	$\frac{15}{2}$	0	-90

حيث أن عمود الثوابت مازال يحتوى على قيمة سالبة (5 -) لذلك فإن الحل الحالى مازال حلا غير مسموح به ، وحيث أن هذه القيمة هي القيمة السالبة الوحيدة في عمود الثوابت فيكون المتغير الخارج هو المتغير  $x_3$  ويكون الصف الأول بالجدول السابق هو الصف المحورى .

لتحديد المتغير الخارج يتم قسمة عناصر الصف (- Z) على العناصر المناظرة لها بالصف المحورى السالبة فقط ، حيث لا يكون لدينا سوى خرج

القسمة 30 -  $= -\frac{1}{4} \div \frac{15}{2}$  ونتجاهل إشارة (-) فى خارج

القسمة (بينما لا يجوز قسمة 15 على  $\frac{1}{2}$  لأن  $\frac{1}{2}$  قيمة موجبة) . ومن

ثم يكون المتغير  $x_4$  هو المتغير الداخلى ، ويكون عمود المتغير  $x_4$

بالجدول الأخير هو العمود المحورى ويكون العنصر  $(-\frac{1}{4})$  هو العنصر

المحورى .

### الجدولة الثالثة :

يتم إحلال المتغير  $x_4$  محل المتغير  $x_3$  وتطبق نفس القواعد

التحويلية

المتغيرات الأساسية	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	الثوابت
$x_4$	- 2	0	4	1	0	20
$x_2$	1	1	- 1	0	0	8
$x_5$	1	0	0	0	1	20
- Z	30	0	30	0	0	- 240

يلاحظ أن عناصر عمود الثوابت فى الجدول السابق أصبحت

كلها قيماً موجبة لذلك فإن الحل الحالى أصبح حلاً مسموحاً به ( أو

ممكناً ) ونبدأ بعد ذلك فى البحث عن الحل الأمثل .



### اختبار الأمثلية :

بتطبيق اختبار الأمثلية على الجدول السابق نجد أن معامل المتغيرين غير الأساسيين وهما :  $x_3$  ,  $x_1$  فى صف دالة الهدف  $(-Z)$  موجب الإشارة وكان المطلوب هو جعل دالة الهدف  $Z$  ، أصغر ما يمكن ، لذلك يكون الحل الحالى هو الحل الأمثل وهو كما يلى :

$$x_5^* = 20 , \quad x_4^* = 20 , \quad x_2^* = 8$$

وأصغر قيمة لدالة الهدف هى :  $Z = 240$  .

### مثال ( ٧ ) :

استخدم طريقة السمبلكس فى حل النموذج التالى :

$$\text{Min } Z = 12x_1 + 9x_2$$

بشرط أن :

$$8x_1 + 4x_2 \leq 240$$

$$15x_1 + 10x_2 \leq 450$$

$$9x_1 + 6x_2 \leq 360$$

$$-x_1 - x_2 \leq -20$$

$$x_i \geq 0 , \quad (i = 1, 2)$$

## المرحلة الأولى :

نبدأ بتحويل المتباينات إلى معادلات وذلك بإضافة متغير مقيم موجب الإشارة لكل قيد على النحو التالي :

$$\begin{aligned} 8x_1 + 4x_2 + x_3 &= 240 \\ 15x_1 + 10x_2 + x_4 &= 450 \\ 9x_1 + 6x_2 + x_5 &= 360 \\ -x_1 - x_2 + x_6 &= -20 \end{aligned}$$

لوجود قيمة سالبة في ثوابت القيود سوف نستخدم أولاً طريقة مبدول السمبلكس لتحويل الحل من حل غير مسموح به إلى حل مسموح به من خلال جولات الحل التالية :

### الجولة الأولى :

المتغيرات الأساسية	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	الثوابت
$x_3$	8	4	1	0	0	0	240
$x_4$	15	10	0	1	0	0	450
$x_5$	9	6	0	0	1	0	360
$x_6$	-1	-1	0	0	0	1	-20
-Z	12	9	0	0	0	0	0

سوف نختار المتغير الذي له قيمة سالبة في عمود الثوابت وهو المتغير  $x_6$  كمتغير خارج ويكون صف  $x_6$  هو الصف المحوري ، ولتحديد المتغير الداخل يتم قسمة معاملات صف  $(-Z)$  على العناصر المناظرة لها السالبة الإشارة بالصف المحوري كما يلي :

$$12 \div (-1) = -12 \quad , \quad 9 \div (-1) = -9$$

وبتجاهل إشارة خارج القسمة فيكون أقل خارج قسمة هو القيمة 9 وبالتالي يكون المتغير  $x_2$  هو المتغير الداخل ويكون العمود الثاني بالجدول السابق هو العمود المحوري ، ويكون العنصر  $(-1)$  هو العنصر المحوري ، وننتقل إلى الجولة التالية :

الجولة الثانية :

المتغيرات الأساسية	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	الثوابت
$x_3$	4	0	1	0	0	4	160
$x_4$	5	0	0	1	0	10	250
$x_5$	3	0	0	0	1	6	240
$x_2$	1	1	0	0	0	-1	20
$-Z$	3	0	0	0	0	9	-180

حيث أن عناصر عمود الثوابت فى الجدول السابق أصبحت كلها قيما موجبة فيصبح الحل الحالى حلاً مسموحاً به ونبحث بعد ذلك عن الحل الأمثل .

### اختبار الأمثلية :

بتطبيق اختبار الأمثلية على الجدول السابق نجد أن المتغيرين غير الأساسيين وهما :  $x_6, x_1$  لهما معاملين موجبيين فى صف دالة الهدف ،  $Z$  ، بالجدول ، وحيث أن المطلوب هو تعظيم دالة الهدف فيكون الحل الحالى مسموحاً به ولكنه ليس بالحل الأمثل وهناك إمكانية لتحسينه .

باستخدام طريقة السمباكس الأساسية يتم اختيار المتغير  $x_6$  كمتغير خارج ويكون عمود هذا المتغير هو العمود المحورى ، ولتحديد المتغير الداخل يتم قسمة عناصر عمود الثوابت على العناصر المناظرة لها بالعمود المحورى الموجبة فقط كما يلى :

$$240 \div 4 = 60 , 250 \div 10 = 25 , 160 \div 4 = 40$$

ويؤخذ المتغير المناظر لأقل خارج قسمة وهو المتغير  $x_1$  كمتغير خارج ويكون صف  $x_1$  هو الصف المحورى - ثم ننقل إلى الجولة التالية :

الجدول الثالث :

المتغيرات الأساسية	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	الثوابت
$x_3$	2	0	1	-0.4	0	0	60
$x_6$	0.5	0	0	0.1	0	1	25
$x_5$	0	0	0	-0.6	1	0	90
$x_2$	1.5	1	0	0.1	0	0	45
- Z	-1.5	0	0	-0.9	0	0	-405

اختبار الأمثلية :

بتطبيق اختبار الأمثلية على الجدول السابق يلاحظ أن المتغيرات غير الأساسية هما المتغيرين  $x_4$  ,  $x_1$  ولهما معاملين سالبين في صف دالة الهدف ، Z ، وحيث أن المطلوب هو تعظيم دالة الهدف فيكون الحل الحالي هو الحل الأمثل وهو كما يلي :

$$x_6^* = 25 , \quad x_5^* = 90 , \quad x_3^* = 60 , \quad x_2^* = 45$$

وأكبر قيمة لدالة الهدف هي :  $Z = 405$  .

مثال ( ٨ ) :

استخدم طريقة السمبلكس في حل النموذج التالي :

$$\text{Min } Z = 4x_1 + x_2$$

بشرط أن :

$$2x_1 + x_2 = 3$$

$$4x_1 + 3x_2 \leq 10$$

$$x_i \geq 0, \quad (i = 1, 2)$$

**المحل :**

حيث أن القيد الأول على الصورة = ، فيستبدل هذا القيد  
بقيدين أحدهما على الصورة أصغر من أو يساوى والآخر على  
الصورة أكبر من أو يساوى فتصبح قيود النموذج كما يلي :

$$2x_1 + x_2 \leq 3$$

$$2x_1 + x_2 \geq 3$$

$$4x_1 + 3x_2 \leq 10$$

نضرب طرفي القيد الثانى فى (1 -) ليتحول إلى الصورة أصغر من

أو يساوى حيث :

$$2x_1 + x_2 \leq 3$$

$$2x_1 - x_2 \leq -3$$

$$4x_1 + 3x_2 \leq 10$$

نحول المتباينات إلى معادلات بإضافة متغير متمم موجب

الإشارة لكل قيد كما يلي :

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 3$$

$$-2x_1 - 10x_2 + x_4 = -3$$

$$4x_1 + 3x_2 + x_5 = 10$$

بظهور قيمة سالبة في ثوابت القيود فيكون الحل غير مسموح به  
ونستخدم طريقة مبدول السمبلكس لتحويل الحل إلى حل مسموح به  
كما يلي :

للجولة الأولى :

المتغيرات الأساسية	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	الثوابت
$x_3$	2	1	1	0	0	3
$x_4$	-2	-1	0	1	0	-3
$x_5$	4	3	0	0	1	10
$-Z$	4	1	0	0	0	0

باختيار المتغير الذي له قيمة سالبة في عمود الثوابت وهو  
المتغير  $x_4$  كمتغير خارج ويكون صف  $x_4$  هو الصف المحوري ،  
ولتحديد المتغير الداخل يتم قسمة معاملات صف  $(-Z)$  على العناصر  
المنظرة لها ذات الإشارة السالبة حيث :

$$4 \div (-2) = -2 \quad , \quad 1 \div (-1) = -1$$

بتجاهل إشارة خارج القسمة فيكون أقل خارج قسمة هو القيمة  
(1) فيشير ذلك إلى أن المتغير الداخل هو المتغير  $x_2$  ويكون عمود  
 $x_2$  هو العمود المحوري ، والعنصر  $(-1)$  هو العنصر المحوري  
وننتقل إلى الجولة التالية :

الجولة الثانية :

المتغيرات الأساسية	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	الثوابت
$x_3$	0	0	1	1	0	3
$x_2$	2	1	0	-1	0	3
$x_5$	-2	0	0	3	1	1
-Z	2	0	0	1	0	-3

باختفاء القيم السالبة من عمود الثوابت بالجدول السابق يصبح  
الحل الحالي مسموحاً به ، ونبحث حينئذ عن الحل الأمثل .

اختبار الأمثلية :

المتغيران غير الأساسيين بالحل السابق هما  $x_1$  ,  $x_4$  لهما  
معاملان موجبان في صف دالة الهدف ، Z ، وحيث أن المطلوب هو  
تعظيم دالة الهدف فيكون الحل الحالي مسموحاً به ولكنه غير أمثل  
ويمكن تحسينه .

ووفقاً لقواعد طريقة السمبلكس الأساسية يتم اختيار المتغير  $x_1$   
كمشغول داخل لأن له أكبر قيمة موجبة في صف (- Z) ويكون عمود  
هذا المتغير هو العمود المحوري ، ولتحديد المتغير الداخل نقسم  
عناصر عمود الثوابت على العناصر المناظرة لها ذات الإشارة  
الموجبة بالعمود المحوري ، فنجد أن خارج القسمة الوحيد الممكن هو :



$$3 \div 2 = 1.5$$

فيكون المتغير الخارج هو  $x_2$  ويكون صف هذا المتغير هو الصف المحوري وننتقل إلى الجولة التالية :

الجولة الثالثة :

المتغيرات الأساسية	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	الثوابت
$x_3$	0	0	1	1	0	0
$x_1$	1	0.5	0	-0.5	0	1.5
$x_5$	0	1	0	2	1	4
$-Z$	0	-1	0	2	0	-6

حيث أن المتغير غير الأساسي  $x_4$  مازال له معامل موجب في صف دالة الهدف ( $-Z$ ) فإن الحل الحالي يكون غير أمثل ويمكن تحسينه ويكون المتغير  $x_4$  هو المتغير الداخل ، وعمود  $x_4$  هو العمود المحوري . ولتحديد الصف المحوري نقسم عناصر عمود الثوابت بالجدول الأخير على عناصر العمود المحوري ذات الإشارة الموجبة ، حيث :

$$4 \div 2 = 2 , 0 \div 1 = 0$$

ويكون المتغير  $x_3$  هو المتغير الخارج ( حيث له أقل خارج قسمة ) ويكون صف  $x_3$  هو الصف المحوري وننتقل بعد ذلك إلى الجولة التالية :

### الجولة الرابعة :

المتغيرات الأساسية	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	الثوابت
$x_4$	0	0	1	1	0	0
$x_1$	1	0.5	0.5	0	0	1.5
$x_5$	0	1	-2	0	1	4
- Z	0	-1	-2	0	0	-6

بتطبيق اختبار الأمثلية على الجدول السابق يلاحظ أن المتغيرين غير الأساسيين في هذه الجولة هما :  $x_3$  ,  $x_2$  ولهما معاملين سالبين في صف (- Z) وهما -1 , -2 على الترتيب ، وحيث أن المطلوب هو تعظيم دالة الهدف ، Z ، فيكون الحل الحالي هو الحل الأمثل وهو:

$$Z = 6 \quad , \quad x_5^* = 4 \quad , \quad x_4^* = 0 \quad , \quad x_1^* = 1.5$$

### ملاحظات عامة على طريقة السمبلكس

١ - إذا كان أحد عناصر الصف المحوري في أية جولة من جولات الحل يساوى صفر فإن عناصر العمود المتقاطع مع هذا العنصر تظل كما هي بدون تغيير في جولة الحل التالية بعد تطبيق القواعد التحويلية .

بالمثل ، إذا كان أحد عناصر العمود المحورى فى أية  
جولة من جولات الحل يساوى صفر فإن عناصر الصف  
المتقاطع مع هذا العنصر تظل كما هى بدون تغيير فى جولة  
الحل التالية .

٢ - عند استخدام طريقة السمبلكس الأساسية ، إذا كانت عناصر عمود  
المتغير الداخلى ( أى عناصر العمود المحورى ) جميعها سالبة  
و/ أو تساوى صفر فإنه يتعذر اختيار المتغير الخارج وبالتالي  
الاستمرار فى تحسين الحل ويكون الحل فى هذه الحالة غير  
محدود وهذا يعنى أن المتغير يمكن أن يأخذ قيمة كبيرة للغاية  
مما يزيد من قيمة دالة الهدف إلى ما لا نهاية .

بالمثل ، عند استخدام طريقة مبدول السمبلكس ، إذا كانت  
عناصر صف المتغير الخارج ( أى عناصر الصف المحورى )  
جميعها موجبة و / أو تساوى صفر فإنه يتعذر اختيار المتغير  
الداخلى وبالتالي الاستمرار فى الاتجاه بالحل نحو الإمكانية ومن  
ثم فإن النموذج الأصلى لن يكون له حل ممكن .

٣ - إذا كان هناك بعض المتغيرات غير الأساسية لها معاملات تساوى  
صفر فى صف دالة الهدف ،  $Z$  ، فإنه يمكن تحويل هذه  
المتغيرات إلى متغيرات أساسية ولكن دون أن تتغير قيمة دالة  
الهدف ، وهذا يعنى أن هناك عدة حلول للنموذج الأصلى .

لذلك فلكي يكون هناك حل أمثل وحيد للنموذج يشترط أن تكون كافة معاملات المتغيرات غير الأساسية في صف دالة الهدف سالبة في حالة إيجاد الحد الأقصى لدالة الهدف وموجبة في حالة إيجاد الحد الأدنى لدالة الهدف .

فإذا كانت إحدى جولات الحل لأحد نماذج البرمجة الخطية والمطلوب فيه  $\text{Max } Z$  هي كالتالي :

المتغيرات الأساسية	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	الثوابت
$x_3$	0	-1	1	3	0	15
$x_1$	1	3	0	5	0	30
$x_5$	0	2	0	4	1	12
$-Z$	0	0	0	-4	0	-50

من الجدول السابق يلاحظ أن المتغيرين غير الأساسيين هما :

$x_4 = -4$  ،  $x_2 = 0$  ، فيكون الحل الحالي أمثل وهو كما يلي :

$$Z = 50 \quad , \quad x_5^* = 12 \quad , \quad x_3^* = 15 \quad , \quad x_1^* = 30$$

ولكن هذا الحل ليس هو الحل الأمثل الوحيد ، إذ يمكن

اختيار المتغير غير الأساسي  $x_2$  الذي له معامل يساوي صفر في صف دالة الهدف ،  $Z$  ، كمتغير داخل ثم يتم اختيار المتغير

$x_5$  كمتغير خارج وفقا لقواعد طريقة السمبلكس الأساسية  
وننتقل إلى الجولة التالية :

المتغيرات الأساسية	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	الثوابت
$x_3$	0	0	1	5	0.5	21
$x_1$	1	0	0	-1	1.5	12
$x_2$	0	1	0	2	0.5	6
-Z	0	0	0	-4	0	-50

والحل الحالي هو أيضا حل أمثل آخر للنموذج ولكن  
بنفس القيمة لدالة الهدف وهو كما يلي :

$$Z = 50 , \quad x_3^* = 21 , \quad x_2^* = 6 , \quad x_1^* = 12$$

٤ - التعادل عند اختيار المتغيرات الداخلة والخارجة

أ - عند تطبيق طريقة السمبلكس الأساسية .

أولا : التعادل عند اختيار المتغير الداخل

عند تحديد المتغير الداخل في إحدى جولات الحل يتم اختيار  
المتغير الذي له أكبر معامل موجب في صف دالة الهدف ،  $Z$  ، في  
حالة الحد الأقصى لدالة الهدف والمتغير الذي له أقل معامل في صف  
دالة الهدف ،  $Z$  ، في حالة الحد الأدنى لدالة الهدف .

وعند تعادل متغيرين أو أكثر في هذا المعيار فلا توجد قاعدة تشير إلى الاختيارات التي تؤدي إلى الحل الأمثل بشكل أسرع ويتم الاختيار في هذه الحالة بطريقة عشوائية .

فإذا كانت دالة الهدف ، مثلاً هي :

$$Z = 5 x_1 + 5 x_2 - 2 x_3 - 2 x_4$$

فيمكن اختيار أى من  $x_1$  ,  $x_2$  ، على السواء ، كمتغير داخل

إذا كان المطلوب هو : Max Z

ويمكن اختيار أى من  $x_3$  ,  $x_4$  ، على السواء كمتغير داخل

إذا كان المطلوب هو : Min Z

ثانياً : التعادل عند اختيار المتغير الخارج

قد يحدث التعادل عند اختيار المتغير الخارج بتساوى نسبتيين أو أكثر عند مستوى أقل خارج قسمة للتوابت على العناصر المناظرة لها في العمود المحوري ، وهذا يعنى أن أكثر من متغير أساسى يصل إلى صفر في وقت واحد بزيادة المتغير الداخل الجديد . ولما كان من المتعذر إخراج أكثر من متغير واحد في الجولة الواحدة من الحل فإن باقى المتغيرات المتساوية معه تظل عند مستوى الصفر .

ولكن قواعد طريقة السبلكس تقتضى أن يكون عدد المتغيرات الموجبة في الحل مساوياً لعدد القيود الهيكلية ،  $m$  ، وأن يكون عدد المتغيرات الصفرية مساوياً للفرق بين عدد المتغيرات ،  $n$  ، وعدد القيود  $m$  ، أى مساوياً لـ  $(n - m)$  . وفى حالة تعادل أكثر من

متغير خارج فإن عدد المتغيرات غير الصفريّة يقل عن عدد القيود ،  
 $m$  ، وهذه الحالة تسمى بالانتكاس فى الحل degeneracy .

ويمكن الخروج من حالات الانتكاس فى الحل باستخدام قاعدة  
 شارنر وكوبر Charnes & Cooper كما يلى :

- تحديد المتغيرات الأساسية المتعادلة التى تقابل أقل خارج قسمة  
 للثوابت على عناصر العمود المحورى وذلك حتى يمكن تحديد  
 الصفوف المحورية المرشحة .

- البدء بأول عمود من مصفوفة الوحدة على يسار العمود المحورى  
 الداخلى ويتم إيجاد خارج قسمة عناصر هذا العمود فى الصفوف  
 المحورية المرشحة والعناصر المقابلة لها فى العمود المحورى .

- إذا تم التوصل إلى نسب غير متساوية فإنه يمكن فض التعادل باختيار  
 المتغير المقابل للنسبة الأقل . أما إذا كانت النسب مازالت متساوية فإنه  
 يمكن الانتقال إلى العمود التالى على اليسار من مصفوفة للوحدة ، وهكذا  
 حتى يتم التوصل إلى نسب متفاوتة ويختار المتغير المقابل للنسبة الأقل  
 كمتغير خارج .

فعلى سبيل المثال ، إذا كان لدينا الحل المبدئى التالى وكان  
 المطلوب هو  $Max Z$  :

المتغيرات الأساسية	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	الثوابت
$x_3$	1	0	1	0	0	4
$x_4$	0	1	0	1	0	6
$x_5$	3	2	0	0	1	12
$-Z$	3	5	0	0	0	0

المتغير الداخل في هذه الحالة هو  $x_2$  ويكون عمود  $x_2$  هو العمود المحوري ولتحديد المتغير الخارج يتم قسمة عناصر عمود الثوابت على عناصر العمود المحوري حيث :

$$12 \div 2 = 6 , 6 \div 1 = 6$$

في هذه الحالة يكون المتغيران المرشحان للخروج هما  $x_5$  ،  $x_4$  ، ولفض هذا التعادل يتم قسمة عناصر العمود الأول من مصفوفة الوحدة ( أي عمود  $x_3$  ) الواقعة في الصفوف المحورية المرشحة وهما صفر ، صفر على العناصر المقابلة في العمود المحوري وهما : 1 ، 2 ، نحصل على :

$$0 \div 2 = 0 , 0 \div 1 = 0$$

وبالتالي لا يمكن فض التعادل بين المتغيرين المرشحين ، لذلك تنتقل إلى العمود التالي من مصفوفة الوحدة على اليسار وهو عمود  $x_4$  وتكون العناصر هي : صفر ، واحد والنسب المقابلة للصفوف المحورية المرشحة هي :



$$\text{صف } x_4 : 1 \div 1 = 1 , \text{ صف } x_5 : 0 \div 2 = 0$$

وبالتالى يمكن اختيار المتغير  $x_5$  كمتغير خارج لمقابلته للنسبة الأكل .

ب - عند تطبيق طريقة مبدول السمبالكس

أولاً : التعادل عند اختيار المتغير الخارج

عند تحديد المتغير الخارج فى إحدى جولات الحل يتم اختيار المتغير الذى له أكبر معامل سالب فى عمود الثوابت ( وبمستوى فى ذلك الحد الأقصى والحد الأدنى لدالة الهدف  $Z$  ) .

وعند تعادل متغيرين أو أكثر فى هذا المعيار فلا توجد قاعدة تشير إلى الاختيارات التى تؤدي إلى الحل المسموح به بشكل أسرع ويتم الاختيار فى هذه الحالة بطريقة عشوائية .

ثانياً : التعادل عند اختيار المتغير الداخلى

قد يحدث التعادل عند اختيار المتغير الداخلى بتساوى نسبتين أو أكثر عند مستوى أقل خارج قسمة لمعاملات صف دالة الهدف على المعاملات المناظرة لها بالمصف المحورى السالبة فقط . وفى هذه الحالة فلا توجد قاعدة تشير إلى الاختيارات التى تؤدي إلى الحل المسموح به بشكل أسرع ويتم الاختيار أيضاً فى هذه الحالة بطريقة عشوائية .

### (١ - ٥) مبدول نموذج البرمجة الخطية :

#### Dual of Linear Programming Model

إذا كان لدينا مشكلة أصلية مصاغة في صورة برنامج خطي فإنه يقترن بها مشكلة أخرى تمثل الوجه الآخر للمشكلة الأصلية ويمكن صياغة نموذج لها يسمى مبدول النموذج الأصلي .

فإذا كان نموذج البرنامج الخطي للمشكلة الأصلية في الصورة

التالية :

$$\text{Maximize } Z = t_1 x_1 + t_2 x_2 + \dots + t_n x_n$$

بشرط أن :

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n \leq c_1$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n \leq c_2$$

:

:

$$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n \leq c_m$$

$$x_i \geq 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

فإن مبدول هذا النموذج يصاغ على النحو التالي :

$$\text{Minimize } Z = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_m y_m$$

بشرط أن :

$$a_{11} y_1 + a_{21} y_2 + \dots + a_{m1} y_m \geq t_1$$

$$a_{12} y_1 + a_{22} y_2 + \dots + a_{m2} y_m \geq t_2$$

:

:

$$a_{1n} y_1 + a_{2n} y_2 + \dots + a_{mn} y_m \geq t_n$$

$$y_i \geq 0, \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

ومن ثم فإن العلاقة بين النموذج الأصلي ونموذج المبدول تتحدد

كالآتي :

١ - إذا كان النموذج الأصلي يتكون من  $n$  من المتغيرات ،  $m$  من القيود الهيكلية ، فإن نموذج المبدول سوف يتكون من  $m$  من المتغيرات ،  $n$  من القيود الهيكلية .

٢ - إذا كان اتجاه دالة الهدف ،  $Z$  ، في النموذج الأصلي " حد أقصى " فإنه يتحول في نموذج المبدول إلى " حد أدنى " والعكس بالعكس .

٣ - إذا كانت دالة الهدف ،  $Z$  ، في النموذج الأصلي " حد أقصى " فإن متباينات القيود الهيكلية ينبغي أن تكون جميعها على صورة أصغر من أو يساوي ثم تتحول في نموذج المبدول إلى صورة أكبر من أو يساوي . أما إذا كانت بعض متباينات النموذج الأصلي في صورة أكبر من أو يساوي فينبغي تحويلها إلى صورة أصغر من أو يساوي عن طريق ضرب طرفي المتباينة في  $(-1)$  حتى يمكن إيجاد نموذج المبدول .

أما إذا كانت دالة الهدف ،  $Z$  ، في النموذج الأصلي " حد أدنى " فإن متباينات القيود الهيكلية ينبغي أن تكون جميعها على صورة أكبر من أو يساوي ثم تتحول في نموذج المبدول إلى صورة أصغر من أو يساوي . أما إذا كانت بعض متباينات

النموذج الأصلي في صورة أصغر من أو يساوى فينبغى تحويلها إلى صورة أكبر من أو يساوى عن طريق ضرب طرفى المتباينة فى (1-) حتى يمكن إيجاد نموذج المبدول .

1- إذا كانت بعض القيود الهيكلية فى النموذج الأصلي على شكل معادلات فإنه ينبغى تحويل كل معادلة إلى متباينتين إحداهما على صورة أصغر من أو يساوى والأخرى على صورة أكبر من أو يساوى ثم تضرب طرفى المتباينة الثانية فى (1-) فى حالة الحد الأقصى لدالة الهدف فى النموذج الأصلي لتتحول إلى صورة أصغر من أو يساوى ، أو تضرب طرفى المتباينة الأولى فى (1-) فى حالة الحد الأدنى لدالة الهدف فى النموذج الأصلي لتتحول إلى صورة أكبر من أو يساوى .

فعلى سبيل المثال ، إذا كان لدينا القيد التالى فى النموذج الأصلي والذي فيه  $Max Z$  :

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = c_1$$

فعد إيجاد نموذج المبدول ينبغى تحويل هذا القيد إلى قيدين أحدهما على صورة  $\leq$  والآخر على صورة  $\geq$  كما يلى :

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n \leq c_1$$

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n \geq c_1$$

ثم يترك القيد الأول على صورة  $\leq$  كما هو ويضرب طرفى القيد الثانى فى (1-) ليتحول إلى صورة  $\leq$  كما يلى :

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n \leq c_1$$

$$-a_{11} x_1 - a_{12} x_2 - \dots - a_{1n} x_n \leq -c_1$$

٥ - تتحول معاملات المتغيرات القرارية في دالة الهدف في النموذج الأصلي ، أى  $(i = 1, 2, \dots, n)$  ، إلى ثوابت لقيود نموذج المبدول .

٦ - تتحول ثوابت القيود الهيكلية بالنموذج الأصلي ، أى  $(i = 1, 2, \dots, m)$  ، إلى معاملات للمتغيرات القرارية ،  $y_i$  ، في دالة الهدف في نموذج المبدول .

٧ - تخضع المتغيرات القرارية في أى من النموذجين لقيود عدم السلبية .

ويمكن حل نموذج المبدول بنفس طريقة حل النموذج الأصلي ، ويعطى الحل الأمثل لنموذج المبدول معلومات كاملة عن الحل الأمثل للنموذج الأصلي والعكس صحيح ، فمن الحل الأمثل للنموذج الأصلي يمكن اشتقاق الحل الأمثل لنموذج المبدول على النحو التالى :

$$y_j^* = x_{n+j}$$

حيث تشير  $n$  إلى عدد المتغيرات القرارية في النموذج الأصلي .

ويلاحظ أنه في حالة وجود قيم موجبة في الحل النهائى للمتغير المتم في أحد القيود الهيكلية للنموذج الأصلي ( أى أنه ضمن المتغيرات الأساسية في الحل الأمثل ) فسوف المتغير المقابل لهذا القيد في المبدول يساوى صفر ، أما إذا كانت قيمة المتغير المتم لأحد

القيود الهيكلية في النموذج الأصلي منه تساوى صفر ( أى أنه ضمن المتغيرات غير الأساسية ) فإن المتغير المقابل لهذا القيد في نموذج المبدول سيكون موجبا ، أى أن :

$$y_j^* = 0 \quad \text{إذا كان } x_{n+j}^* > 0$$

كما أن

$$y_j^* > 0 \quad \text{إذا كان } x_{n+j}^* = 0$$

ويفيد اشتقاق نموذج المبدول وحله إذا كان النموذج الأصلي يتكون من عدد كبير من القيود الهيكلية وعدد أقل من المتغيرات ، ففي هذه الحالة يفضل إيجاد وحل نموذج المبدول بدلا من حل النموذج الأصلي ، لأن نموذج المبدول في هذه الحالة سوف يتضمن عدد كبير من المتغيرات وعدد أقل من القيود الهيكلية . ولعل السبب في ذلك هو أن عدد جولات حل النموذج الخطى بطريقة السمبلكس تكون دالة في عدد القيود الهيكلية . فقد وجد في معظم الحالات العملية أن عدد جولات الحل يتراوح عادة ما بين 1.5 - 3 مرات عدد القيود الهيكلية،  $m$  ، في النموذج .

ويمكن تلخيص العلاقة بين النموذج الأصلي ونموذج المبدول في الجدول التالي :

نموذج المبدول	النموذج الأصلي
Min Z : دالة الهدف	Max Z : دالة الهدف
Max Z	Min Z
ثوابت القيود الهيكلية	معاملات دالة الهدف
معاملات دالة الهدف	ثوابت القيود الهيكلية
معاملات القيد المقابل للمتغير $x_i$	معاملات المتغير $x_i$
معاملات المتغير المقابل للقيد $x_j$	معاملات القيد $z$
القيود الهيكلية على صورة $\geq$	القيود الهيكلية على صورة $\leq$
على صورة $\leq$	على صورة $\geq$
المتغير المقابل للقيد $z \geq 0$	القيد $z$ على شكل متباينة
المتغير المقابل للقيد $z$ غير مقيد الإشارة	القيد $z$ على شكل معادلة

### مثال (٩) :

في النموذج الخطي التالي :

$$\text{Min } Z = x_1 + 2x_2 + 3x_3$$

بشروط أن :

$$2x_1 - x_2 + x_3 \geq 8$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 12$$

$$x_2 - x_3 \geq 4$$

$$x_i \geq 0, \quad (i = 1, 2, 3)$$

المطلوب :

- ١ - حل النموذج السابق مستخدماً طريقة السمبلكس .
- ٢ - اشتقاق نموذج المبدول للنموذج الأصلي واشتقاق الحل الأمثل لنموذج المبدول من الحل الأمثل للنموذج الأصلي .

الحل :

- ١ - نضرب طرفي كل من القيدين الأول والثالث في (1-) لتحويل كل منهما إلى صورة  $\leq$  كما يلي :

$$-2x_1 + x_2 - x_3 \leq -8$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 12$$

$$x_2 - x_3 \leq -4$$

ثم نضيف متغير متمم لكل قيد لتحويل المتباينات إلى معادلات كما يلي :

$$-2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -8$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 12$$

$$-x_2 + x_3 + x_6 = -4$$

بظهور قيم سالبة في ثوابت القيود فسوف نستخدم طريقة مبدول

السمبلكس ويكون جدول الحل المبني هو :



الجولة الأولى :

المتغيرات الأساسية	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	الثوابت
$x_4$	-2	1	-1	1	0	0	-8
$x_5$	1	1	2	0	1	0	12
$x_6$	0	-1	1	0	0	1	-4
-Z	1	2	3	0	0	0	0

يتم اختيار المتغير  $x_4$  كمتغير خارج لأن له أكبر قيمة سالبة في عمود الثوابت ويكون صف  $x_4$  هو الصف المحوري ولتحديد المتغير الداخل يتم قسمة عناصر صف (-Z) على العناصر المناظرة لها السالبة فقط بالصف المحوري كما يلي :

$$3 \div (-1) = -3 \quad , \quad 1 \div (-2) = -\frac{1}{2}$$

بتجاهل إشارة خارج القسمة فيكون المتغير المناظر لأقل خارج قسمة هو  $x_1$  ويكون صف  $x_1$  هو الصف المحوري . بتطبيق القواعد التحويلية ننتقل إلى الجولة التالية .

الجولة الثانية :

المتغيرات الأساسية	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	الثوابت
$x_1$	1	-0.5	0.5	-0.5	0	0	4
$x_5$	0	1.5	1.5	0.5	1	0	4
$x_6$	0	-1	1	0	0	1	-4
-Z	0	2.5	2.5	0.5	0	0	-4

يتم اختيار المتغير  $x_6$  كمتغير خارج لأن له أكبر قيمة سالبة في عمود الثوابت ويكون صف  $x_6$  هو الصف المحوري وبتطبيق نفس القواعد السابقة لتحديد المتغير الداخل سيكون المتغير  $x_2$  هو المتغير الداخل ويكون عمود  $x_2$  هو العمود المحوري وننتقل إلى الجولة التالية :

الجولة الثالثة :

المتغيرات الأساسية	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	الثوابت
$x_1$	1	1	0	-0.5	0	0.5	6
$x_5$	0	0	3	0.5	1	1.5	2
$x_2$	0	0	-1	0	0	-1	4
-Z	0	0	5	0.5	0	2.5	-14

وحيث أن القيم الموجودة بعمود الثوابت فى الجدول الأخير أصبحت كلها موجبة فيكون الحل الحالى مسموحا به ونبحث بعد ذلك عن الأمثلية .

#### اختبار الأمثلية :

بتطبيق اختبار الأمثلية على الجدول السابق يلاحظ أن المتغيرات غير الأساسية هي :  $x_3$  ,  $x_4$  ,  $x_6$  لها معاملات موجبة فى صف دالة الهدف ،  $(-Z)$  ، وحيث أن المطلوب هو تصغير دالة الهدف فيكون الحل الحالى أمثل وهو على النحو التالى :

$$Z = 14 \quad , \quad x_5^* = 2 \quad , \quad x_2^* = 4 \quad , \quad x_1^* = 6$$

٢ - لإشتقاق نموذج المبدول للنموذج الأصلى ، حيث أن دالة الهدف فى النموذج الأصلى هي :  $\text{Min } Z$  فينبغى أن نجعل القيود الهيكلية فى النموذج الأصلى جميعها على صورة أكبر من أو يساوى فتصبح القيود الهيكلية كما يلى :

$$2x_1 - x_2 + x_3 \geq 8$$

$$-x_1 - x_2 - 2x_3 \geq -12$$

$$x_2 - x_3 \geq 4$$

ويكون نموذج المبدول على الصورة :

$$\text{Max } Z = 8y_1 - 12y_2 + 4y_3$$

بشروط أن :

$$2 y_1 - y_2 \leq 1$$

$$- y_1 - y_2 + y_3 \leq 2$$

$$y_1 - 2 y_2 - y_3 \leq 3$$

$$y_j \geq 0 , \quad (j = 1, 2, 3)$$

من الحل الأمثل للنموذج الأصلي يمكن اشتقاق الحل الأمثل

لنموذج المبدول على النحو التالي :

حيث أن :

$$y_j^* = x_{n+j}$$

$$y_1^* = x_4 = 0.5$$

$$y_2^* = x_5 = 0$$

$$y_3^* = x_6 = 2.5$$

$$y_4^* = x_1 = 0$$

$$y_5^* = x_2 = 0$$

$$y_6^* = x_3 = 5$$

$$Z = 14$$

وبالتالي يكون الحل الأمثل لنموذج المبدول هو :

$$Z = 14 , \quad y_6^* = 5 , \quad y_3^* = 2.5 , \quad y_1^* = 0.5$$

## (١ - ٦) تحليل الحساسية Sensitivity Analysis

إذا كان لدينا البرنامج الخطي التالي :

$$\text{Max } Z = \sum_{i=1}^n t_i x_i$$

بشروط أن :

$$\sum_{i=1}^n a_{ji} x_i \leq c_j \quad (j = 1, 2, 3, \dots, m)$$

$$x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n)$$

فإن معاملات دالة الهدف  $t_i$  (حيث :  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ) وثوابت القيود  $c_j$  (حيث :  $j = 1, 2, 3, \dots, m$ ) ومعاملات القيود الهيكلية  $a_{ji}$  (حيث :  $i = 1, 2, \dots, n$  &  $j = 1, 2, \dots, m$ ) تعد من معالم النموذج .

وبعد إيجاد الحل الأمثل للنموذج قد تطرأ بعض التغيرات على هذه المعالم ويكون المطلوب هو معرفة أثر هذه التغيرات على الحل الأمثل للنموذج ، ولا يتطلب الأمر إعادة حل النموذج من جديد بل يكفي والحالة هذه باختبار حساسية الحل الأمثل في ظل الظروف الجديدة للنموذج وهو ما يعرف بتحليل الحساسية .

وسوف نتناول تحليل الحساسية عندما تكون دالة الهدف ،  $Z$  ، حد أقصى ، أي في الحالة  $\text{Max } Z$  ، وذلك في الحالات التالية :

- ١ - التغير في معاملات دالة الهدف .
- ٢ - التغير في ثوابت القيود .
- ٣ - التغير في معاملات القيود الهيكلية .
- ٤ - إضافة قيد هيكلى جديد .
- ٥ - إضافة متغير جديد .

وسوف نقتصر هنا على دراسة الحالات التى يحدث فيها واحد فقط من التغيرات الخمس المشار إليها بالنموذج ، أما الحالات التى يحدث فيها تغييرين أو أكثر بالنموذج فى نفس الوقت فإنها تخرج عن نطاق هذا المؤلف .

### أولاً : التغير فى معاملات دالة الهدف

رأينا فيما سبق أن معاملات صف دالة الهدف ، أى صف،  $(-Z)$  ، فى جدول الحل لأى جولة من جولات الحل يشير إلى الأثر المحتمل على قيمة دالة الهدف فى حالة اختيار أى من المتغيرات المختلفة كمتغير داخل فى جولة تالية للحل ، لذلك فإن اختيار مدى تأثير التغير فى معاملات دالة الهدف على الحل الأمثل سوف يختلف باختلاف ما إذا كانت هذه التغيرات تتعلق بمتغير أساسى أم متغير غير أساسى فى الحل الأمثل .

#### أ - التغير فى معاملات المتغيرات غير الأساسية :

رأينا أنه فى حالة مشاكل التعظيم لدالة الهدف فإن معاملات المتغيرات غير الأساسية فى صف  $(-Z)$  بجدول الحل الأمثل ينبغي

أن تكون سالبة ( أو صفر ، وذلك فى حالة تعدد الحلول المثلى ) ،  
لذلك فإذا كان التغير فى معاملات دالة الهدف يؤدي إلى ظهور قيم  
موجبة فى صف معاملات دالة الهدف فى الجولة النهائية فمعنى ذلك  
أن الحل الحالى لم يعد أمثل ويمكن الاستمرار فى جولات تالية  
لتحسين الحل ، أما إذا كان التغير لا يؤدي إلى ظهور قيم موجبة فإن  
الحل يظل حلاً أمثل . ومن ثم يمكن استنتاج القاعدة التالية :

١ - أى نقص فى معاملات دالة الهدف الأصلية يظل معه الحل أمثل  
وذلك لأن هذا يؤدي إلى زيادة المستوى السالب للمعاملات فى  
صف (  $-Z$  ) فى الجولة النهائية للحل .

٢ - زيادة معاملات دالة الهدف بمقدار يقل عن ( أو يتعادل مع )  
المعامل السالب فى صف (  $-Z$  ) فى الجولة النهائية للحل سوف  
يظل معه الحل أمثل دون تعديل .

٣ - زيادة معاملات دالة الهدف بمقدار يزيد عن المعامل السالب فى  
صف (  $-Z$  ) فى الجولة النهائية للحل ، سوف يفقد الحل الأصلى  
أمثليته حيث يترتب على ذلك ظهور قيمة موجبة للمعامل فى صف  
(  $-Z$  ) فى الجولة النهائية وهذا يعنى أن هناك إمكانية لاختيار  
هذا المتغير كمتغير داخل والاستمرار فى جولات تالية للوصول  
إلى الحل الأمثل الجديد .

ويعنى ذلك أن قيمة معاملات المتغيرات غير الأساسية فى  
الصف الأخير ، أى صف (  $-Z$  ) ، من الحل الأمثل (بإشارة مخالفة)

تمثل أقصى زيادة ممكنة في معاملات دالة الهدف الأصلية نون أن يطرأ تغيير على الحل الأمثل المتحصل عليه .

ب - التغير في معاملات المتغيرات الأساسية :

رأينا أن معاملات المتغيرات الأساسية في الصف الأخير من جدول السمبلكس ينبغي أن تكون مساوية أصفار وبحوث أى تغيير في هذه المعاملات في دالة الهدف الأصلية فإنها لن تصبح مساوية أصفار في جدول الحل الأمثل النهائي ولكى تساوى هذه المعاملات أصفار مرة أخرى يتم ضرب عناصر الصف الذى يقابل المتغير الأساسى في جدول الحل النهائي في مقدار التغير في معامل دالة الهدف والذى نشير إليه بالرمز  $h$  ثم نطرح الناتج من الصف الأخير ، أى صف  $(-Z)$  بعد إدخال التعديل عليه وذلك حتى يمكن استعادة الصف كمعامل للمتغير الأساسى ، ويتم اختبار الحل الأمثل في ظل الموقف الجديد .

فإذا كانت كافة المعاملات في صف  $(-Z)$  سالبة أو مساوية للصفر فإن الحل يظل أمثل ولا يقبل التحسين ، أما إذا ظهرت معاملات موجبة في صف  $(-Z)$  فإن الحل النهائي يفقد أمثليته ويمكن الاستمرار في جولات إضافية حتى نحصل على الحل الأمثل الجديد .

وسوف نوضح العرض السابق من خلال المثال التالى :



مثال (١٠) :

أعتبر النموذج الخطي التالي :

$$\text{Max } Z = 10 x_1 + 3 x_2 + 8.5 x_3$$

بشرط أن :

$$3 x_1 + 2 x_2 + x_3 \leq 21$$

$$4 x_1 + 2 x_2 + 5 x_3 \leq 20$$

$$2 x_1 + 5 x_2 + x_3 \leq 12$$

$$x_i \geq 0 , \quad (i = 1, 2, 3)$$

المطلوب :

- ١ - إيجاد الحل الأمثل للنموذج مستخدماً طريقة السمبلكس .
- ٢ - اختبار حساسية الحل الأمثل إذا حدثت التغيرات التالية في معاملات دالة الهدف :

- أ - نقص معامل  $x_1$  بدالة الهدف بمقدار 3 .
- ب - تغيير معامل  $x_2$  بدالة الهدف من 3 إلى 4.5 .
- ٣ - تحديد نطاق التغير في معامل كل من  $x_1$  ,  $x_3$  بدالة الهدف والذي يظل معه الحل أمثل .

الحل :

- ١ - نحول المتباينات إلى معادلات بإضافة متغير متم لكل قيد كما يلي :

$$3 x_1 + 2 x_2 + x_3 + x_4 = 21$$

$$4 x_1 + 2 x_2 + 5 x_3 + x_5 = 20$$

$$2x_1 + 5x_2 + x_3 + x_6 = 12$$

تستمر جولات الحل كما يلي :

الجولة الأولى :

↓

المتغيرات الأساسية	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	الثوابت
$x_4$	3	2	1	1	0	0	21
$x_5$	4	2	5	0	1	0	20
$x_6$	2	5	1	0	0	1	12
-Z	10	3	8.5	0	0	0	0

←

حيث أن المعامل 10 في صف (-Z) هو أكبر معامل

موجب فيكون المتغير  $x_1$  هو المتغير الداخل ويكون عمود  $x_1$  هو

العمود المحوري ، ولتحديد المتغير الخارج نقسم عناصر عمود

الثوابت على العناصر المناظرة لها في العمود المحوري ذات الإشارة

الموجبة فيكون المتغير ذو النسبة الأقل هو  $x_5$  ويكون هو المتغير

الخارج وصفه هو الصف المحوري وننتقل إلى الجولة التالية .

الجدول الثاني :

المتغيرات الأساسية	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	الثوابت
$x_4$	0	0.5	-2.75	1	-0.75	0	6
$x_1$	1	0.5	1.25	0	0.25	0	5
$x_6$	0	4	-1.5	0	-0.5	1	2
-Z	0	-2	-4	0	-2.5	0	-50

وحيث أن المتغيرات غير الأساسية وهي :  $x_2$  ,  $x_3$  ,  $x_5$  لها معاملات سالبة في الصف الأخير بالجدول السابق ، فيكون الحل الحالي أمثل وهو كالتالي :

$$Z = 50 \quad , \quad x_6^* = 2 \quad , \quad x_4^* = 6 \quad , \quad x_1^* = 5$$

٢ - ١ - لاختبار حساسية الحل الأمثل إذا نقص معامل  $x_1$  بدالة الهدف بمقدار 3 ، نلاحظ أن  $x_1$  متغير أساسي وقيمة التغير في معامل  $x_1$  هو 3 . -

صف  $x_1$  مضروباً في عكس التغير ( أي مضروباً في (3) ) :

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	الثوابت
$x_1$	3	1.5	3.75	0	0.75	0	15

صف (-Z) بعد إدخال التغير

-Z	-3	-2	-4	0	-2.5	0	-50
----	----	----	----	---	------	---	-----

بالجمع ، نحصل على صف  $(-Z)$  الجديد كما يلي :

- Z	0	- 0.5	- 0.25	0	- 1.75	0	- 35
-----	---	-------	--------	---	--------	---	------

وحيث أن المتغيرات غير الأساسية مازال لها معاملات سالبة في صف  $(-Z)$  الجديد فيظل الحل أمثل وإن تغيرت قيمة دالة الهدف من 50 إلى 35 .

ب - في حالة زيادة معامل  $x_2$  بدالة الهدف من 3 إلى 4.5 أى بمقدار 1.5 : فمن المعلوم أن نقص معامل  $x_2$  بدالة الهدف يعنى الاتجاه نحو السالب بشكل أكثر في معامل  $x_2$  بصف دالة الهدف وبالتالي لا يوجد حد أدنى للتغير ويظل الحل أمثل كلما نقص معامل  $x_2$  بدالة الهدف كمتغير أساسى .

أما إذا زاد معامل  $x_2$  بمقدار 1.5 سيصبح معامل  $x_2$  بصف دالة الهدف فى جدول الحل الأمثل هو :

$$- 2 + 1.5 = - 0.5$$

وحيث أن معامل  $x_2$  مازال سالباً فيظل الحل الحالى أمثل كما هو .

أما إذا تغير معامل  $x_2$  بدالة الهدف من 3 إلى 5 ، مثلاً ، أى زاد بمقدار 2 ، ففي هذه الحالة سيصبح معامل  $x_2$  فى صف دالة الهدف ،  $(-Z)$  بجدول الحل الأمثل هو :

$$- 2 + 2 = 0$$

ويظل الحل الحالي أمثل ، إلا أن المشكلة تتحول إلى حالة حلول منتهى متعددة نظراً لوجود متغير غير أساسي معاملته يساوي صفر في صف (Z -).

لما إذا تغير معامل  $x_2$  بدالة الهدف ، مثلاً ، من 3 إلى 6 أي زاد بمقدار 3 ، فإن معامل  $x_2$  في صف دالة الهدف بجداول الحل الأمثل هو :

$$-2 + 3 = 1$$

أي سيتغير المعامل من القيمة السالبة إلى القيمة الموجبة وبالتالي فإن الحل الأمثل الحالي يفقد أمثليته ويكون هناك إمكانية لتحسين الحل ، ويتم اختيار  $x_2$  حينئذ كمتغير داخل في جولة تالية .

يتضح لنا أن نطاق التغير في معامل  $x_2$  بدالة الهدف (وهو متغير غير أساسي) الذي يظل معه الحل أمثل دون تغيير هو :

الحد الأدنى : لا يوجد

الحد الأعلى = 2

٣ - لتحديد نطاق التغير في معامل  $x_3$  بدالة الهدف الذي يظل معه الحل أمثل دون تغيير ، نلاحظ أن  $x_3$  متغير غير أساسي ، ومن ثم فإن :

الحد الأدنى لنطاق التغير : لا يوجد حد أدنى

الحد الأعلى لنطاق التغير = 4

إنن :

$4 \leq$  نطاق التغير في معامل  $x_3$  بدالة الهدف  $\leq \infty$  -

لتحديد نطاق التغير في معامل  $x_1$  بدالة الهدف الذى يظل معه الحل أمثل دون تغيير ، نلاحظ أن  $x_1$  متغير أساسى .

نفرض أن قيمة التغير فى معامل  $x_1$  بدالة الهدف هو  $h$  ، صف  $x_1$  مضروباً فى عكس التغير ( أى مضروباً فى  $-h$  ) هو :

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$
$x_1$	$-h$	$-0.5h$	$-1.25h$	$0$	$-0.25h$	$0$

صف  $(-Z)$  بعد إدخال التغير :

$-Z$	$h$	$-2$	$-4$	$0$	$-2.5$	$0$
------	-----	------	------	-----	--------	-----

بجمع العناصر المقابلة فى الصفين نحصل على صف  $(-Z)$  الجديد وهو :

$-Z$	$0$	$(-0.5h - 2)$	$(-1.25h - 4)$	$0$	$(-0.25h - 2.5)$	$0$
------	-----	---------------	----------------	-----	------------------	-----

من عمود  $x_2$  ينتج أن :

$$-0.5h - 2 = 0$$

$$h = -4 \quad \text{إنن :}$$

من عمود  $x_3$  ينتج أن :

$$-1.25h - 4 = 0$$

إذن :  $h = - 3.2$

من عمود  $x_5$  ينتج أن :

$$- 0.25 h - 2.5 = 0$$

إذن :  $h = - 10$

وسوف يتم اختيار أصغر قيمة لـ  $h$  بإشارة سالبة لتكون الحد الأدنى لنطاق التغير فيكون :

الحد الأدنى لنطاق التغير في معامل  $x_1$  بدالة الهدف  $- 3.2$  - وحيث أنه لا توجد قيم موجبة للمتغير  $h$  فيكون الحد الأعلى لنطاق التغير غير موجود ، إذن :

الحد الأعلى لنطاق التغير في معامل  $x_1$  بدالة الهدف  $= \infty$

ومن ثم فإن :

$$- 3.2 \leq h \leq \infty .$$

## ثانياً : التغير في ثوابت القيود الهيكلية

التغير في ثوابت القيود الهيكلية يتوقف تأثيره على مدى استغلال كمياتها في الحل الأمثل ، فإذا لم تكن كمية الموارد مستنفذة بالكامل فإن هذا يعني أن المتغير المتم في القيد موضع التغير له قيمة موجبة كمتغير أساسي كما تكون قيمة هذا المتغير المتم في صف دالة الهدف يساوى صفر في جولة الحل الأمثل ، ومن ثم فإن أي زيادة في ثابت مثل هذا القيد لن يكون لها أي تأثير على قيمة دالة الهدف في الحل

الأمثل، وتنطبق نفس الحالة في حالة نقص ثابت هذا القيد ولكن إذا تجاوز النقص قيمة المتغير المتمم للقيد في الحل الأمثل فإن هذا سيؤدي إلى ظهور قيمة سالبة في عمود الثوابت ومن ثم يؤدي إلى عدم إمكانية الحل ويتم الاستمرار حينئذ في جولات إضافية للحل بموجب طريقة مبدول السمبلكس حتى يتم الحصول على حل مسموحاً به لو ممكناً .

لما إذا كانت كمية الموارد بأحد القيود مستنفذة بالكامل في الحل الأمثل والتي يكون المتغير المتمم لهذا القيد ضمن المتغيرات غير الأساسية أى تساوى صفر ولها معامل موجب فى صف دالة الهدف ، فإن أى تغير فى ثابت هذا القيد سوف يؤدي حتماً إلى تغير مواز فى قيمة دالة الهدف وليس بالضرورة فى الحل الأمثل .

وللتعرف على مدى أثر هذا التغير لثابت قيد معين نضرب معاملات عمود المتغير المتمم لهذا القيد فى جدول الحل الأمثل فى قيمة التغير ثم نجمع الناتج على عناصر عمود الثوابت فى جدول الحل الأمثل ، فينتج عمود جديد للثوابت ، فإذا ظهرت قيمة ( لو قيم ) سالبة فى هذا العمود الجديد فيتعين الاستمرار فى جولات إضافية وفقاً لطريقة مبدول السمبلكس للحصول على حل مسموح به ، أما إذا لم تظهر قيم سالبة فى عمود الثوابت الجديد فيعنى ذلك أن الحل الحالى مازال أمثل .

وبالطريقة نفسها يمكن تحديد نطاق التفسير فى ثابت القيد الذى يظل معه الحل أمثل دون تغيير ، حيث يتم ضرب عناصر عمود



معاملات المتغير المتمم للقيد في جدول الحل الأمثل في قيمة التغير والذي نفترض أنها تساوى  $h$  ، ثم نجمع الناتج على العناصر المناظرة لها في عمود الثوابت في جدول الحل الأمثل ونساوى القيم الناتجة بالصفر ، وبحل المعادلات الناتجة يتم الحصول على قيمة ( أو عدة قيم ) للمتغير  $h$  والتي نحدد بها نطاق التغير في ثابت هذا القيد الذي يظل معه الحل أمثل دون تغيير .

### مثال ( ١١ ) :

اعتبر مثال (١٠)

المطلوب : اختبار حساسية الحل الأمثل في الحالات الآتية :

- ١ - زيادة ثابت القيد الثانى من 20 إلى 26 .
- ٢ - نقص ثابت القيد الثالث من 12 إلى 10.5 .
- ٣ - تحديد نطاق التغير في ثابت القيد الثانى الذى يظل معه الحل أمثل دون تغيير .

### الحل :

- ١ - في حالة زيادة ثابت القيد الثانى من 20 إلى 26 :

يلاحظ أن متمم القيد الثانى هو المتغير  $x_5$  ، وللتعرف على أثر زيادة ثابت هذا القيد بمقدار 6 وحدات نضرب عناصر عمود معاملات المتغير المتمم  $x_5$  ، في جدول الحل النهائى في قيمة

التغير وهي 6 ونضيف الناتج إلى عمود الثوابت لنحصل على عمود الثوابت الجديد ، حيث :

المتغيرات الأساسية	عمود الثوابت الجديد = عمود الثوابت + قيمة التغير × عمود $x_5$
$x_4$	$-0.75(6) + 6 = 1.5$
$x_1$	$0.25(6) + 5 = 7.5$
$x_6$	$-0.5(6) + 2 = -1$
$-Z$	$-2.5(6) + (-50) = -65$

ونظرا لظهور قيمة سالبة في عمود الثوابت الجديد في صف  $x_6$  فإن الحل يصبح في هذه الحالة غير ممكن ويقتضى الأمر الاستمرار في جولات إضافية وفقا لطريقة مبدول السمبلكس بعد إحلال عمود الثوابت الجديد محل عمود الثوابت الأصلي كما يلي .:

المتغيرات الأساسية	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	الثوابت
$x_4$	0	0.5	-2.75	1	-0.75	0	1.5
$x_5$	1	0.5	1.25	0	0.25	0	7.5
$x_6$	0	4	-1.5	0	-0.5	1	-1
$-Z$	0	-2	-4	0	-2.5	0	-65

بترشيح المتغير  $x_6$  كمتغير خارج ثم ترشيح المتغير  $x_3$  كمتغير داخل يتم الانتقال إلى الجولة التالية :

الثوابت	$x_6$	$x_5$	$x_4$	$x_3$	$x_2$	$x_1$	المتغيرات الأساسية
$x_4$	- 1.83	0.17	1	0	- 6.83	0	
$x_1$	0.83	- 0.37	0	0	8.33	1	
$x_3$	- 0.67	0.33	0	1	- 2.67	0	
- Z	- 2.67	- 1.17	0	0	- 10.67	0	

وحيث أن عمود الثوابت الجديد أصبحت كل معاملاته موجبة فيكون الحل الحالي مسموحاً به ، ومن جهة أخرى يلاحظ أن المتغيرات غير الأساسية وهي :  $x_2$  ,  $x_5$  ,  $x_6$  لها معاملات سالبة في صف (- Z) بالجندول الأخير ، فيكون الحل الحالي هو الحل الأمثل .

أي أنه في حالة زيادة ثابت القيد الثاني من 20 إلى 26 أي بمقدار 6 وحدات يصبح لدينا حل أمثل جديد هو كالتالي :

$$Z = 62.33 , x_4^* = 3.33 , x_3^* = 0.67 , x_1^* = 6.67$$

٢ - في حالة نقص ثابت القيد الثالث من 12 إلى 10.5 ، أي النقل بمقدار 1.5 وحدة .

يلاحظ أن متمم القيد الثالث هو المتغير  $x_6$  ، لذا يتم ضرب عناصر عمود معاملات المتغير  $x_6$  في جدول الحل النهائي في قيمة المتغير ( أي في 1.5 - ) ونضيف الناتج إلى عمود الثوابت في جدول الحل النهائي كما يلي :

المتغيرات الأساسية	عمود الثوابت الجديد = عمود الثوابت + قيمة التغير $\times$ عمود $x_6$
$x_4$	$0 \times (-1.5) + 6 = 6$
$x_1$	$0 \times (-1.5) + 5 = 5$
$x_6$	$1 \times (-1.5) + 2 = 0.5$
$-Z$	$0 \times (-1.5) + (-50) = -50$

كما هو واضح فإن عمود الثوابت الجديد لم يشتمل على قيمة سالبة ، لذلك فإن مجموعة المتغيرات الأساسية في الحل الأمثل الأولى تظل كما هي وإن حدث بعض التعديل في قيم تلك المتغيرات على النحو التالي :

$$Z = 50 , \quad x_6^* = 0.5 , \quad x_4^* = 6 , \quad x_1^* = 5$$

٣ - لتحديد نطاق التغير في ثابت القيد الثاني الذي يظل معه الحل أمثل ، نفرض أن قيمة التغير في ثابت القيد الثاني هو  $h$  ، وحيث أن المتغير المتمم للقيد الثاني - كما رأينا - هو  $x_5$  ، فيضرب عناصر عمود معاملات  $x_5$  في جدول الحل النهائي في  $h$  وجمع الناتج على العناصر المناظرة في عمود الثوابت في جدول الحل النهائي أيضا ثم بمساواة كل قيمة ناتجة بالصفر ، وبحل المعادلات المتحصل عليها يتم الحصول على قيمة ( أو قيم ) التغير  $h$  كما يلي :

المتغيرات الأساسية	عمود الثوابت الجديد = عمود الثوابت + قيمة التغير $\times$ عمود $x_5$
$x_4$	$- 0.75 (h) + 6 = - 0.75 h + 6$
$x_1$	$0.25 (h) + 5 = 0.25 h + 5$
$x_6$	$- 0.5 (h) + 2 = 0.5 h + 2$
$- Z$	$- 2.5 (h) + (- 50) = - 2.5 h - 50$

بمساواة كل من معاملات عمود الثوابت بالصفر وحل

المعادلات نحصل على ما يلي:

من صف  $x_4$ :

$$- 0.75 h + 6 = 0$$

$$h = 8 \quad \text{إذن:}$$

من صف  $x_1$ :

$$0.25 h + 5 = 0$$

$$h = - 20 \quad \text{إذن:}$$

من صف  $x_6$ :

$$0.5 h + 2 = 0$$

$$h = 4 \quad \text{إذن:}$$

ويتم اختيار أصغر قيمة موجبة وأصغر قيمة بإشارة سالبة

كحدين أعلى وأدنى على الترتيب لقيمة التغير  $h$ .

$$- 20 \leq h \leq 4$$

ويكون الحد الأدنى الذي يمكن أن يصل إليه ثابت القيد الثاني هو :

$$20 - 20 = 0$$

بينما الحد الأعلى الذي يمكن أن يصل إليه ثابت القيد الثاني هو :

$$20 + 4 = 24$$

ففي داخل هذا النطاق يظل الحل الأمثل الأولي أمثل كما هو ، إلا أن قيمة دالة الهدف سوف تتغير بمقدار  $(- 2.5 h)$  .

### ثالثاً : التغير في معاملات القيود الهيكلية

معاملات القيود الهيكلية  $a_{ij}$  ترتبط عموماً بالمتغيرات  $x_i$  واختبار مدى تأثير التغير في تلك المعاملات على الحل الأمثل سوف يختلف باختلاف ما إذا كانت هذه المعاملات تنطبق بمتغير أساسي أم متغير غير أساسي في الحل الأمثل الأولي .

#### أ - التغير في معاملات المتغيرات غير الأساسية

تتأمل هذه الحالة التغير في معاملات المتغيرات غير الأساسية من دالة الهدف ، والتغير في هذه الحالة إما أن يؤدي إلى أن يظل الحل الأمثل الأولي حلاً أمثل أو أن يفقد الحل الأمثل الأولي أمثليته ولكنه يظل حلاً ممكنًا .

ولاختبار حساسية الحل الأمثل في هذه الحالة يتم ضرب عمود المتغير المتمم للقيد الذي طرأ التغير على أحد معاملاته في قيمة هذا التغير ثم يضاف الناتج إلى عمود المتغير الذي طرأ التغير على أحد

معاملاته ، ويلاحظ قيمة المعامل الناتج في صف دالة الهدف،  $(-Z)$  ، على النحو التالي :

١ - إذا كان المعامل الناتج في صف دالة الهدف سالباً فإن الحل يظل هو الحل الأمثل .

٢ - إذا كان المعامل الناتج في صف دالة الهدف يساوى صفر فإن الحل يظل هو الحل الأمثل مع وجود حل ( لو حلول ) أمثل آخر (متلى أخرى) .

٣ - إذا كان المعامل الناتج في صف دالة الهدف قد تحول إلى قيمة موجبة فإن الحل في هذه الحالة يفقد أمثليته ولكنه يظل حلاً ممكناً، ومن ثم يمكن الاستمرار في جولات إضافية تالفة لتحسين الحل .

### مثال (١٢) :

اعتبر مثال (١٠) والمطلوب هو :

١ - تحديد مدى صلاحية الحل الأمثل في حالة تغير القيد الثاني ليصبح على الصورة :

$$4x_1 + 2x_2 + 3.6x_3 \leq 20$$

٢ - تحديد نطاق التغير في معامل  $x_3$  في كل من القيدين الثاني والثالث والذي يظل معه الحل أمثل دون تغيير .

## الحل :

١ - تغير معامل  $x_3$  في القيد الثاني ( أى  $a_{23}$  ) من 5 إلى 3.6 :  
 نلاحظ أن قيمة التغير في معامل  $x_3$  بالقيد الثاني هي (- 1.4) .  
 كما أن المتغير المتمم للقيد الثاني هو المتغير  $x_5$  ، لذلك فإن  
 عمود معاملات المتغير  $x_3$  بعد التعديل سيكون هو نفس عمود  
 المتغير في جدول الحل الأمثل مضافاً إليه حاصل ضرب  
 المتغير المتمم ،  $x_5$  ، مضروباً في مقدار التغير على النحو  
 التالي :

المتغيرات الأساسية	عمود $x_3$	قيمة التغير $\times$ عمود $x_5$ +	عمود $x_3$ الجديد =
$x_4$	-2.75	+ (- 0.75) (- 1.4)	= - 1.7
$x_1$	1.25	+ (0.25) (- 1.4)	= 0.9
$x_6$	-1.5	+ (- 0.5) (- 1.4)	= - 0.8
-Z	-4	+ (- 2.5) (- 1.4)	= - 0.5

وحيث أن معامل المتغير  $x_3$  الجديد في صف دالة الهدف  
 يساوى (- 0.5) أى مازال سالباً فإن الحل الأمثل الأولي يظل حلاً  
 أمثل كما هو .

أما إذا أصبح معامل المتغير  $x_3$  الجديد في صف دالة الهدف  
 موجب القيمة ، مثلاً ، فإن الحل الأمثل الأولي في هذه الحالة سوف  
 يفقد أمثليته ويمكن تحسينه باختيار  $x_3$  كمغير داخل والاستمرار في  
 جولات تالية للحل .



٢ - أ - تحديد نطاق التغير في معامل المتغير  $x_3$  بالقيد الثانى ( أ ) فى  $a_{23}$  :

نفرض أن قيمة التغير في معامل المتغير  $x_3$  بالقيد الثانى هو  $h_{23}$  ويكون المطلوب هو إيجاد نطاق التغير في قيمة  $h_{23}$  الذى يتحول بعده معامل  $x_3$  فى صف دالة الهدف إلى قيمة موجبة ، وحيث أن المتغير المتمم للقيد الثانى هو  $x_5$  فإن نطاق التغير يتحدد وفقا للمعادلة التالية فى صف دالة الهدف :

$$x_3 \text{ معامل} + x_5 \text{ معامل} (h_{23}) = 0$$

$$-4 + (-2.5)(h_{23}) = 0$$

إنن :

$$h_{23} = -1.6$$

ويكون نطاق التغير للقيمة  $h_{23}$  كما يلى :

$$-1.6 \leq h_{23} \leq \infty$$

ويعنى ذلك أن الحل الأمثل الأولى يظل أمثل فى حالة تراوح معامل المتغير  $x_3$  فى القيد الثانى فيما بين  $(3.4 = 5 - 1.6)$  ،  $\infty$  ، بحيث إذا نقص معامل  $x_3$  فى القيد الثانى عن القيمة 3.4 فإن هذا يؤدي إلى ظهور معامل موجب فى صف دالة الهدف  $(-Z)$  ، وحينئذ يتم اختيار المتغير  $x_3$  كمتغير داخل فى جولة تالية للحل ، فى حين أن أى زيادة فى معامل المتغير  $x_3$  بالقيد الثانى سوف يظل معها الحل الحالى أمثل .

ب - تحديد نطاق التغير في معامل المتغير  $x_3$  بالقيد الثالث (أى فى  $a_{33}$ ) :

بفرض أن قيمة التغير في معامل المتغير  $x_3$  بالقيد الثالث هو  $h_{33}$  ، وحيث أن المتغير المتمم للقيد الثالث هو  $x_6$  ، لذلك فإن نطاق التغير يتحدد وفقا للمعادلة التالية في صف دالة الهدف ،  $(-Z)$  :

$$x_3 \text{ معامل} + h_{33} \text{ معامل} = 0$$

$$-4 + (0) (h_{33}) = 0$$

إن :  $h_{33} = 0$

هذه النتيجة تعنى أن التغير في قيمة معامل  $x_3$  بالقيد الثالث (أى فى قيمة  $a_{33}$ ) بأى مقدار سواء بالزيادة أو بالنقص لن يؤثر على الحل الأمثل الأولى .

ب - التغير في معاملات المتغيرات الأساسية :

إذا حدث تغير في معاملات القيود  $(a_{ij})$  وكان هذا التغير يتعلق بأحد المتغيرات الأساسية وليكن المتغير  $(x_i)$  فسوف يؤدي ذلك إلى إحدى النتائج التالية في الحل النهائي :

- قد يظل الحل الأمثل الأولى حلا أمثلا كما هو .
- قد يفقد الحل الأمثل الأولى أمثليته ولكنه يظل حلا ممكنا .
- قد يفقد الحل الأمثل الأولى أمثليته ويصبح حلا غير مسموح به في نفس الوقت .

لإختبار حساسية الحل الأمثل في هذه الحالة نضرب عمود المتغير المتمم للقيد الذي طرأ التغير على أحد معاملاته في قيمة التغير الحادث ثم نضيف الناتج إلى عمود المتغير الأساسي ،  $x_i$  ، الذي طرأ التغير على معاملته فنحصل على عمود المتغير الأساسي الجديد ،  $x_i$  ، بعد التغير .

ولما كان  $x_i$  متغيراً أساسياً في الحل الأمثل الأولي فإن كافة معاملاته في جدول الحل النهائي ينبغي أن تكون أصفاً في كل الصفوف ما عدا العنصر المقابل لنفس المتغير حيث يكون المعامل 1 ، كما يتضح من الشكل التالي :

المتغيرات الأساسية	$x_1$	$x_2$	...	$x_i$	$x_{i+1}$	...	$x_n$	الثوابت
...	...	...	...	0	...	...	...	...
...	...	...	...	0	...	...	...	...
:				:				
$x_i$	...	...	...	1	...	...	...	...
:				:				
...	...	...	...	0	...	...	...	...
...	...	...	...	0	...	...	...	...
-Z	...	...	...	0	...	...	...	...

شكل (٢-١)

فإن لم يكن هذا الموقف متحققاً في العمود الجديد للمتغير الأساسي ،  $x_i$  ، بعد التعديل الذي تم إدخاله آنفاً ، فلا بد من استعادته

(أى جعل العنصر الموجود فى صف المتغير  $x_i$  وعمود المتغير  $x_j$  يساوى 1 وذلك باستخدام عمليات الجمع والطرح والضرب والقسمة، وسوف يؤدي هذا بالطبع إلى حدوث بعض التغيرات فى صف معاملات دالة الهدف و / أو ثوابت القيود وذلك على النحو التالى :

١ - إذا ظلت كافة معاملات صف دالة الهدف بعد التعديلات سالبة ، أصفار ، وظلت أيضا كافة ثوابت القيود موجبة فإن الحل الأمثل الأولي يظل كما هو حلا أمثل ، وإن طرأت بعض التغيرات على قيمة دالة الهدف ،  $(-Z)$  .

٢ - إذا ظهرت معاملات موجبة فى صف دالة الهدف وظلت ثوابت القيود موجبة فإن الحل الأمثل يفقد أمثليته ولكنه يظل حلا مسموحا به ويستوجب ذلك الاستمرار فى جولات إضافية لتحسين الحل والوصول إلى الحل الأمثل الجديد .

٣ - إذا ظلت كافة معاملات صف دالة الهدف بعد التعديلات سالبة ، أصفار وظهرت بعض القيم السالبة فى عمود الثوابت فإن الحل لم يعد مسموحا به وينبغى تحويله إلى حل مسموح به وذلك بالاستمرار فى جولات إضافية وفقا لطريقة مبدول السمبلكنس .

٤ - إذا ظهرت معاملات موجبة فى صف دالة الهدف بالإضافة إلى ظهور بعض القيم السالبة فى عمود الثوابت فإن الحل فى هذه الحالة سوف يفقد الأمثلية والإمكانية معا ، وفى هذه الحالة يمكن البدء فى حل جديد تماما للنموذج .

مثال (١٣) :

أعتبر مثال (٤) ، حيث كان النموذج الأصلي على الصورة :

$$\text{Max } Z = 40 x_1 + 50 x_2$$

بشرط أن :

$$x_1 + 2 x_2 \leq 21$$

$$5 x_1 + 4 x_2 \leq 30$$

$$3 x_1 + x_2 \leq 15$$

$$x_i \geq 0 , \quad (i = 1, 2)$$

وكان الحل الأمثل الأولي للنموذج في الصورة التالية :

المتغيرات الأساسية	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	الثوابت
$x_2$	0	1	0.83	-0.17	0	5
$x_1$	1	0	-0.67	0.33	0	2
$x_5$	0	0	1.17	-0.83	1	4
-Z	0	0	-15	-5	0	-330

المطلوب :

اختبار حساسية الحل الأمثل الحالي في حالة :

- ١ - تغير معامل المتغير  $x_1$  في القيد الثاني (أي  $a_{21}$ ) من 5 إلى
- 2 بحيث يصبح القيد الثاني كما يلي :

$$2x_1 + 4x_2 \leq 30$$

٢ - إذا أصبح القيد الثالث على الصورة :

$$3x_1 + 3x_2 \leq 15$$

أى إذا زاد معامل المتغير  $x_2$  بالقيد الثالث من 1 إلى 3 .

**الحل :**

التغير الذى حدث فى معامل المتغير  $x_1$  بالقيد الثانى ( أى فى  $a_{21}$  ) يساوى ( - 3 ) ، وحيث أن متمم القيد الثانى هو المتغير  $x_4$  ، إذن :

المتغيرات الأساسية	عمود $x_1$	قيمة التغير $\times$ عمود $x_4$	عمود $x_1$ الجديد =
$x_2$	0	$+ (-0.17) \times (-3)$	$= 0.51$
$x_1$	1	$+ (-0.33) \times (-3)$	$= 0.01$
$x_5$	0	$+ (-0.83) \times (-3)$	$= 2.49$
- Z	0	$+ (-5) \times (-3)$	$= 15$

ولما أصبح معامل المتغير  $x_1$  فى صف دالة الهدف موجبا فإن الحل الأمثل الحالى يفقد أمثليته ويستوجب التحسين . ومن جهة أخرى فحيث أن  $x_1$  متغير أساسى وأسس تطبيق طريقة السمبلكس تقتضى أن تكون كافة عناصر عمود المتغير  $x_1$  والذى يجب أن يكون مساويا 1 ، كما يتضح من شكل ( ١ - ٢ ) ، ولما كان ذلك غير متحقق فى عمود المتغير  $x_1$  الجديد ويستحيل تحقيقه بالعمليات الجبرية العادية (جمع - طرح - ضرب - قسمة ) فإن الأمر يقتضى البدء فى حل جديد للنموذج .

٢ - إذا حدث تغيير في معامل المتغير  $x_2$  بالقيد الثالث ( أى فى  $a_{32}$  ) قيمته 2 :

حيث أن متم القيد الثالث هو المتغير  $x_3$  لذلك فإن :

المتغيرات الأساسية	عمود $x_2$ الجديد = قيمة المتغير $x_3$ عمود $x_2$ عمود		
$x_2$	1	+	$0(2) = 1$
$x_1$	0	+	$0(2) = 0$
$x_3$	0	+	$0(2) = 2$
-Z	0	+	$0(2) = 0$

وحيث أن المتغير  $x_2$  - كما هو واضح - متغير أساسى لذلك فإن جميع عناصر عموده ( فيما عدا المعامل الذى يقابل صف  $x_2$  ) ينبغي أن تكون أصفار ، ولإستعادة هذا الموقف ينبغي حذف المعامل الذى ظهر فى صف المتغير  $x_3$  وهو 2 وجعله يساوى الصفر ، ويتم ذلك بضرب صف المتغير  $x_2$  فى جدول العمل النهائى فى القيمة (-2) وجمع الناتج على صف المتغير  $x_3$  بذات الجدول كما يلى :

المتغيرات الأساسية	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	الثوابت
صف $x_2$ مضروباً فى (-2)	0	-2	-1.66	0.34	0	-10
صف $x_3$ بعد التعديل بالجمع :	1	2	1.17	-0.83	1	4
صف $x_3$ الجديد	0	0	-0.49	-0.49	1	-6

## البرمجة الخطية

ويصبح جدول الحل الأمثل الأولي بعد هذا التغيير في المعامل  
( $a_{32}$ ) على النحو التالي :

↓

المتغيرات الأساسية	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>3</sub>	x <sub>4</sub>	x <sub>5</sub>	الثوابت
x <sub>2</sub>	0	1	0.83	- 0.17	0	0
x <sub>1</sub>	1	0	- 0.67	0.33	0	2
x <sub>5</sub>	0	0	- 0.49	- 0.49	1	- 6
- Z	0	0	- 15	- 5	0	- 0.33

←

ويظهر قيمة سالبة في عمود الثوابت في صف المتغير x<sub>5</sub>  
فإن الحل لم يعد ممكنا ولتحويله إلى حل ممكن فوفقا لطريقة مبدول  
الممبلكس فإن المتغير x<sub>5</sub> يتم اختياره كمتغير خارج ويصبح صف  
المتغير x<sub>5</sub> هو الصف المحوري ، وبقسمة عناصر صف دالة  
الهدف على العناصر المناظرة لها السالبة الإشارة فقط بالصف  
المحوري حيث :

$$\left( \frac{-5}{-0.49} = 10.2 \quad , \quad \frac{-15}{-0.49} = 30.61 \right)$$

والنسبة الأقل وهي 10.2 تقابل المتغير x<sub>4</sub> فيكون هو المتغير  
الداخل ويكون عموده هو العمود المحوري ثم ننقل إلى الجولة  
التالية للحل :



المتغيرات الأساسية	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	الثوابت
$x_2$	0	1	1	0	-0.35	7.08
$x_1$	1	0	-1	0	0.67	-2.04
$x_4$	0	0	1	1	-2.04	12.24
-Z	0	0	-10	0	-10.2	-268.78

بظهور قيمة سالبة في عمود الثوابت فيتم الاستمرار في جولات الحل وفقاً لطريقة مبدول السمبلكس حيث يكون المتغير  $x_1$  هو المتغير الخارج والمتغير  $x_3$  هو المتغير الداخل مكانه وننتقل إلى جولة الحل التالية :

المتغيرات الأساسية	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	الثوابت
$x_2$	1	1	0	0	0.32	5.04
$x_3$	-1	0	1	0	0.67	2.04
$x_4$	-1	0	0	1	-1.37	10.2
-Z	-10	0	0	0	-16.9	-248.38

يلاحظ في الجدول الأخير أن جميع معاملات عمود الثوابت أصبحت موجبة وفي نفس الوقت فإن المتغيرين غير الأساسيين وهما

$x_5, x_1$  لهما معاملين سالبين في صف دالة الهدف ،  $(-Z)$  ، لذلك يكون الحل الحالي هو الحل الأمثل .

#### رابعاً : إضافة قيد هيكل جديد

في بعض الأحيان قد تستجد بعض الظروف تقتضي إضافة قيد هيكل جديد للنموذج وذلك بعد الحصول على الحل الأمثل ، ويلزم لذلك اختبار ما إذا كان الحل الأمثل الأولي يستوفي القيد الجديد أم لا ؟ فإذا كان الحل الأمثل الأولي يستوفي القيد الجديد فيظل الحل الأولي حلاً أمثلاً كما هو ، أما في حالة عدم استيفاء القيد الجديد فيتم تحويل القيد الجديد إلى معادلة وذلك بإضافة متغير متمم جديد ، ثم يضاف صف هذا القيد إلى جدول الحل النهائي وإجراء ما يلزم من تعديلات لاستعادة خواص جدول الحل الأمثل بالطرق الجبرية المعتادة ونرى أثر ذلك على عمود الثوابت ، فإذا ظلت المعاملات في عمود الثوابت موجبة فإن الحل الأمثل الحالي يظل أمثلاً كما هو وتظل قيمة دالة الهدف ،  $Z$  ، كما هي . أما إذا ظهرت قيم سالبة في عمود الثوابت ففي هذه الحالة لابد من الاستمرار في جولات إضافية وفقاً لطريقة مبدول الممكس للتخلص من تلك القيم السالبة في عمود الثوابت .

### مثال (١٤) :

اعتبر مثال (١٠) ، وبفرض أنه لا يمكن تصريف سوى 4 وحدات من المتغير  $x_1$  ، فالمطلوب اختبار حساسية الحل الأمثل لهذا التعديل .

### الحل :

التعديل المقترح يعنى إضافة قيد هيكلى جديد هو :

$$x_1 \leq 4$$

ولما كان الحل الأمثل الأولى لا يستوفى هذا القيد فيلزم تحويل المتباينة إلى معادلة بإضافة المتغير المتمم  $x_7$  على النحو التالى :

$$x_1 + x_7 = 4$$

بإضافة هذا القيد الهيكلى الجديد فى جدول الحل النهائى فيصبح على الصورة التالية :

المتغيرات الأساسية	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	الثوابت
$x_4$	0	0.5	- 2.75	1	- 0.75	0	0	6
$x_1$	1	0.5	1.25	0	0.25	0	0	5
$x_6$	0	4	- 1.5	0	- 0.5	1	0	2
$x_7$	1	0	0	0	0	0	1	4
- Z	0	- 2	- 4	0	- 2.5	0	0	- 50

### البرمجة الخطية

ولما كان من خواص الحل النهائي أن كافة معاملات عمود المتغير الأساسي ينبغي أن تساوى أصفار ما عدا المعامل المتقاطع فى صف نفس المتغير والذي ينبغي أن يساوى 1 ، وحيث أن هذا الشرط لم يعد متحققاً بالنسبة للمتغير  $x_1$  ، لذلك ينبغي أن نجعل المعامل الموجود عند تقاطع صف المتغير  $x_7$  مع عمود المتغير  $x_1$  - بجدول الحل السابق - يساوى صفر بدلاً من الواحد وذلك لتحقيق خاصية الحل النهائي السابقة ويتم ذلك بطرح عناصر صف المتغير  $x_1$  من عناصر صف المتغير  $x_7$  الجديد وذلك على النحو التالى :

الثوابت	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	المتغيرات الأساسية
6	0	0.5	- 2.75	1	- 0.75	0	0	$x_4$
5	1	0.5	1.25	0	0.25	0	0	$x_1$
2	0	4	- 1.5	0	- 0.5	1	0	$x_6$
- 1	0	- 0.5	- 1.25	0	- 0.25	0	1	$x_7$
- 50	0	- 2	- 4	0	- 2.5	0	0	- Z

بظهور قيمة سالبة فى معاملات عمود الثوابت فإن الحل الحالى لم يعد حلاً مسموحاً به وينبغي - وفقاً لطريقة مبدول السمبلكس - اختيار المتغير  $x_7$  كمتغير خارج والمتغير  $x_3$  كمتغير داخل وننتقل إلى جولة الحل التالية :

المتغيرات الأساسية	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	الثوابت
$x_4$	0	1.6	0	1	-0.2	0	2.2	8.2
$x_1$	1	0	0	0	0	0	1	4
$x_6$	0	4.6	0	0	-0.2	1	-1.2	3.2
$x_3$	0	0.4	1	0	0.2	0	-0.8	0.8
-Z	0	-0.4	0	0	-1.7	0	-3.2	-46.8

وحيث أن معاملات عمود الثوابت أصبحت جميعها موجبة ،  
كما أن المتغيرات غير الأساسية وهي :  $x_2$  ،  $x_5$  ،  $x_7$  لها معاملات  
سالبة في صف دالة الهدف ، ( أى صف  $Z$  - ) ، فيكون الحل الحالي  
هو الحل الأمثل وهو كما يلي :

$$Z = 46.8 , \quad x_6^* = 3.2 , \quad x_4^* = 8.2 , \quad x_3^* = 0.8 , \quad x_1^* = 4$$

#### خامساً : إضافة متغير جديد

بعد التوصل إلى الحل الأمثل لمشكلة البرمجة الخطية قد تظهر  
بعض المتغيرات القرارية الجديدة التي يجب إدخالها ضمن متغيرات  
النموذج الأصلية ، ويعنى ذلك إضافة متغير ( أو متغيرات ) جديد (أو  
جديدة) بمعامل مستقل في دالة الهدف بالإضافة إلى ظهور هذا  
المتغير ( أو تلك المتغيرات ) الجديد ( أو الجديدة ) بمعاملات جديدة  
في كل أو بعض القيود الهيكلية للنموذج .

ويمكن اختبار حساسية الحل الأمثل الأولى الذى تم التوصل إليه وذلك بافتراض أن قيمة المتغير الجديد المضاف للنموذج يساوى صفر، بمعنى أننا سوف نعتبره كما لو كان متغير أساسى بالنموذج . وفى إطار العلاقة بين النموذج الأصلى ونموذج المبدول فإن إضافة متغير جديد للنموذج الأصلى يعنى إضافة قيد جديد لنموذج المبدول ، ومن ثم يمكن اختبار مدى إمكانية الحل الأمثل الأولى فى ضوء هذا التعديل .

فى حالة ما إذا كان الحل الأمثل الأولى يستوفى هذا القيد الجديد فى نموذج المبدول فيظل الحل الأولى للنموذج الأصلى أمثل ، أما إذا لم يتم استيفاء القيد الجديد فى نموذج المبدول فإنه يمكن الاستمرار فى جولات إضافية لحل النموذج الأصلى وذلك باختيار المتغير الجديد المضاف كمتغير داخل ، وفى هذه الحالة فإن هناك تعديلات سوف تطرأ على معاملات جدول الحل النهائى سواء فى معاملات دالة الهدف (  $b_1$  ) أو فى بعض معاملات القيود الهيكلية (  $a_{ij}$  ) .

### مثال (١٥):

اعتبر مثال (١٠) واختبر مدى حساسية الحل الأمثل الأولى الذى تم التوصل إليه إذا أصبح النموذج الأصلى على النحو التالى :

$$\text{Max } Z = 10 x_1 + 3 x_2 + 8.5 x_3 + 6 x_7$$

بشرط أن :

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_7 \leq 21$$

$$4x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 3x_7 \leq 20$$

$$2x_1 + 5x_2 + x_3 \leq 12$$

$$x_i \geq 0, \quad (i = 1, 2, 3, 7)$$

**الحل :**

إضافة المتغير الجديد  $x_7$  للنموذج الأصلي يعنى إضافة قيد جديد فى نموذج المبدول ، هذا القيد يأخذ الصورة التالية :

$$4y_1 + 3y_2 \geq 6$$

وفى إطار العلاقة بين متغيرات النموذج الأصلي ( $x_i$ ) ومتغيرات نموذج المبدول ( $y_i$ ) فمن المعلوم أن :

$$y_j^* = x_{n+j}$$

وحيث أن  $n = 3$  ( عدد المتغيرات القرارية فى النموذج

الأصلى ) إذن :

$$y_j^* = x_{3+j}$$

$$y_1^* = x_4 = 0$$

$$y_2^* = x_5 = 2.5$$

$$y_3^* = x_6 = 0$$

$$y_4^* = x_7 = 0$$

$$y_5^* = x_2 = 2$$

$$y_6^* = x_3 = 4$$

بالتعويض عن قيم  $y_j^*$  فى القيد المضاف لنموذج المبدول ينتج أن :

$$4(0) + 3(2.5) = 7.5$$

وهذا يشير إلى استيفاء هذا القيد مما يعنى أن حل نموذج المبدول مازال ممكناً ، وتأسيساً على ذلك فإن حل النموذج الأصلي يظل أيضاً حلاً أمثل حتى بعد إدخال المتغير الجديد ،  $x_7$  .

### مثال (١٦) :

إذا أعطيت النموذج التالى :

$$\text{Max } Z = 6x_1 + 5x_2 + 2x_3$$

بشرط أن :

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 10$$

$$3x_1 + x_2 + 4x_3 \leq 18$$

$$2x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 14$$

$$x_i \geq 0 , \quad (i = 1, 2, 3)$$

المطلوب :

١ - حل النموذج بطريقة السمبلكس وإيجاد القيم المثلى لمتغيراته .

٢ - تحديد نطاق التغير فى معامل  $x_1$  بدالة الهدف الذى يظل معه الحل أمثلياً .



٣ - اختبار حساسية الحل الأمل المتحصل عليه في كل من الحالات الآتية :

أ - إذا أصبح القيد الأول على الصورة :

$$2x_1 + x_2 + x_3 \leq 10$$

ب - إذا أصبح القيد الثاني على الصورة :

$$3x_1 + x_2 + 4x_3 \leq 16$$

ج - إذا أصبح النموذج الأصلي على الصورة :

$$\text{Max } Z = 6x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 11x_7$$

بشرط أن :

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_7 \leq 10$$

$$3x_1 + x_2 + 4x_3 \leq 18$$

$$2x_1 + 4x_2 + x_3 + 6x_7 \leq 14$$

$$x_i \geq 0, \quad (i = 1, 2, 3, 7)$$

٤ - تحديد نطاق التغير في ثابت القيد الأول الذي يظل معه الحل أمل .

**الحل :**

نضيف متغيرات متممة للقيد الهيكلية بواقع متغير متمم لكل قيد

لنتحول القيود الهيكلية إلى معادلات .

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 10$$

$$3x_1 + x_2 + 4x_3 + x_5 = 18$$

$$2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_6 = 14$$

تبدأ الجولة الأولى باعتبار أن المتغيرات المتممة هي المتغيرات الأساسية .

الجولة الأولى :

المتغيرات الأساسية	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	الثوابت
$x_4$	2	3	1	1	0	0	10
$x_5$	3	1	4	0	1	0	18
$x_6$	2	4	1	0	0	1	14
-Z	6	5	2	0	0	0	0

بتطبيق قواعد طريقة السمباكس الأساسية يتم اختيار  $x_1$  كمتغير داخل ويكون عمود  $x_1$  هو العمود المحوري ، ثم بقسمة معاملات عمود الثوابت على العناصر المناظرة لها بالعمود المحوري واختيار أقل خارج قسمة لذلك يكون المتغير  $x_4$  هو المتغير الخارج ويكون صف  $x_4$  هو الصف المحوري ويتم الانتقال إلى الجولة التالية :

الجولة الثانية :

المتغيرات الأساسية	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	الثوابت
$x_1$	1	1.5	0.5	0.5	0	0	5
$x_5$	0	-3.5	2.5	-1.5	1	0	3
$x_6$	0	1	0	-1	0	1	4
-Z	0	-4	-1	-3	0	0	-30

بتطبيق قواعد اختبار الأمثلة يلاحظ أن المتغيرات الأساسية وهي :  $x_2, x_3, x_4$  لهم معاملات سالبة في صف دالة الهدف ، لذلك فإن الحل الحالي أمثل وهو كما يلي :

$$Z = 30 , \quad x_6^* = 4 , \quad x_5^* = 3 , \quad x_1^* = 5$$

٢ - لتحديد نطاق التغير في معامل  $x_1$  بدالة الهدف الذي يظل معه الحل الأمثل دون تغيير ، يلاحظ أن المتغير  $x_1$  متغير أساسي .

نفرض أن قيمة التغير في معامل  $x_1$  بدالة الهدف هو :  $h$  ، صف  $x_1$  مضروباً في عكس التغير ( أى مضروباً في  $-h$  ) هو :

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$
$x_1$	$-h$	$-1.5h$	$-0.5h$	$-0.5h$	0	0

صف (- Z) بعد إدخال التغيير :

- Z	h	- 4	- 1	- 3	0	0
-----	---	-----	-----	-----	---	---

بجمع العناصر المتناظرة في الصفين نحصل على صف (- Z)

الجديد وهو :

- Z	0	(- 1.5 h-4)	(- 0.5 h-1)	(- 0.5 h-3)	0	0
-----	---	-------------	-------------	-------------	---	---

من عمود  $x_2$  ينتج أن :

$$- 1.5 h - 4 = 0$$

إذن :

$$h = - 2.67$$

من عمود  $x_3$  ينتج أن :

$$- 0.5 h - 1 = 0$$

إذن

$$h = - 2$$

من عمود  $x_4$  ينتج أن :

$$- 0.5 h - 3 = 0$$

إذن

$$h = - 6$$

باختيار أصغر قيمة للتغير  $h$  بإشارة سالبة لتكون الحد الأدنى لنطاق التغير ، فيكون الحد الأدنى لنطاق التغير في معامل  $x_1$  بدالة الهدف هو  $(-2)$  .

حيث أنه لا توجد قيم موجبة للمتغير  $h$  فيكون الحد الأعلى لنطاق التغير غير موجود ، إذن :

الحد الأعلى لنطاق التغير في معامل  $x_1$  بدالة الهدف  $= \infty$  ومن ثم فإن :

$$-2 \leq h \leq \infty$$

وبناء على ذلك فإن :

$$\text{الحد الأدنى لمعامل } x_1 \text{ بدالة الهدف} = 4 - 2 = 6$$

$$\text{الحد الأعلى لمعامل } x_1 \text{ بدالة الهدف} = \infty$$

$$\infty \leq \text{معامل } x_1 \text{ بدالة الهدف الذي يظل معه الحل أمثل} \leq 4$$

٣ - أ - لاختبار حساسية الحل الأمثل المتحصل عليه إذا أصبح القيد الأول على الصورة :

$$2x_1 + x_2 + x_3 \leq 10$$

في هذه الحالة التغير الحادث في معامل  $x_2$  بالقيد الأول ( أى في  $a_{12}$  ) يساوى  $(-2)$  ، وحيث أن  $x_2$  متغير غير أساسى كما أن متمم القيد الأول هو المتغير  $x_4$  ، إذن :

### البرمجة الخطية

المتغيرات الأساسية	عمود $x_1$ الجديد = (قيمة التغير) عمود $x_4$ + عمود $x_1$
$x_1$	$1.5 + 0.5 (-2) = 0.5$
$x_5$	$-3.5 + (-1.5) (-2) = -0.5$
$x_6$	$1 + (-1) (-2) = 3$
$-Z$	$-4 + (-3) (-2) = 2$

وحيث أن معامل المتغير  $x_1$  الجديد في صف دالة الهدف  $(-Z)$  أصبح يساوي قيمة موجبة لذلك فإن الحل الأمثل الأولي يفقد لامتنيته ويقبل التحسين على النحو التالي :

المتغيرات الأساسية	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	الثوابت
$x_1$	1	0.5	0.5	0.5	0	0	5
$x_5$	0	-0.5	2.5	-1.5	0	0	3
$x_6$	0	3	0	-1	1	1	4
$-Z$	0	2	-1	-3	0	0	-30

وطبقا لقواعد طريقة السبيلين الأساسية يتم اختيار المتغير  $x_2$  كمتغير دخل واختيار المتغير  $x_6$  كمتغير خارج وننتقل إلى الجولة التالية :

## البرمجة الخطية

المتغيرات الأساسية	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	الثوابت
$x_1$	1	0	0.5	0.67	0	-0.17	4.33
$x_5$	0	0	2.5	-1.67	1	0.17	3.67
$x_2$	0	1	0	-0.33	0	0.33	1.33
-Z	0	0	-1	-3.67	0	-0.67	-32.67

وحيث المتغيرات غير الأساسية وهي :  $x_3$  ,  $x_4$  ,  $x_6$  لها معاملات سالبة في صف دالة الهدف (-Z) فيكون الحل الحالي أمثل .

ب - إذا أصبح القيد الثاني على الصورة :

$$3x_1 + x_2 + 4x_3 \leq 16$$

التغير الذى حدث هو نقص ثابت القيد الهيكلى الثانى بمقدار 2 ، أى

أن التغير فى ثابت القيد الثانى هو (-2) ومتمم القيد هو المتغير  $x_5$  ، إذن :

المتغيرات الأساسية	عمود الثوابت الجديد = عمود الثوابت + قيمة التغير × عمود $x_5$
$x_1$	$0 \times (-2) + 5 = 5$
$x_5$	$1 \times (-2) + 3 = 1$
$x_6$	$0 \times (-2) + 4 = 4$
-Z	$0 \times (-2) + (-30) = -30$

وحيث أن معاملات عمود الثوابت الجديد متزالت موجبة ، إذن

الحل بظل أمثل كما هو .

ج - اختبار حساسية الحل الأمثل إذا أصبح النموذج الأصلي على النحو التالي :

$$\text{Max } Z = 6x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 11x_7$$

بشرط أن :

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_7 \leq 10$$

$$3x_1 + x_2 + 4x_3 \leq 18$$

$$2x_1 + 4x_2 + x_3 + 6x_7 \leq 14$$

$$x_i \geq 0, \quad (i = 1, 2, 3, 7)$$

تم إضافة المتغير الجديد  $x_7$  للنموذج الأصلي وهذا يعنى إضافة قيد جديد فى نموذج المبدول وبأخذ هذا القيد الصورة التالية :

$$4y_1 + 6y_3 \geq 11$$

ومن العلاقة بين متغيرات نموذج المبدول ( $y_i$ ) ومتغيرات النموذج الأصلي ( $x_i$ ) يتضح أن :

$$y_j^* = x_{n+j} = x_{3+j}$$

$$y_1^* = x_4 = 3$$

$$y_3^* = x_6 = 0$$

بالتعويض عن قيم  $y_j^*$  فى القيد الجديد فلن :

$$4(3) + 6(0) = 12$$



ويعنى ذلك أن القيد الجديد مازال مستوفى وبالتالي فإن حل نموذج المبدول سيظل ممكناً ، ويقود ذلك إلى أن حل النموذج الأصلي يظل أيضاً حلاً أمثل حتى بعد إدخال المتغير الجديد وهو  $x_7$  .

### مثال (١٧) :

فيما يلي البرنامج الخطى التالى :

$$\text{Max } Z = 25 x_1 + 15 x_2$$

بشرط أن :

$$5 x_1 + 2 x_2 \leq 24$$

$$x_1 + x_2 \geq 5$$

$$x_1 \leq 4$$

$$x_i \geq 0 , \quad (i = 1, 2)$$

وكانت إحدى جولات الحل بطريقة السمبلكس على النحو التالى :

المتغيرات الأساسية	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	الثوابت
$x_3$	3	0	1	2	0	14
$x_2$	1	1	0	-1	0	5
$x_5$	1	0	0	0	1	4
- Z	10	0	0	15	0	-75

المطلوب :

١ - هل الحل الحالي أمثل أم لا ؟ وإن لم يكن أمثل فما هو الحل

الأمثل ؟ وأوجد القيم المتلى لمتغيرات النموذج الأصلي :

٢ - اشتقاق نموذج المبدول وإيجاد القيم المتلى لمتغيرات نموذج المبدول .

٣ - اختبار حساسية الحل الأمثل للنموذج الأصلي وذلك فى الحالات التالية :

أ - إذا نقص معامل المتغير  $x_2$  بدالة الهدف بمقدار 4 .

ب - إذا أصبح القيد الأول على الصورة :

$$3x_1 + 2x_2 \leq 24$$

ج - إذا أضيف القيد التالى إلى النموذج الأصلي :

$$x_2 \leq 8$$

٤ - تحديد نطاق التغير فى ثابت القيد الأول الذى يظل معه الحل أمثل .

الحل :

١ - لإختبار أمثلية الحل الحالى ، حيث أن المطلوب هو :  $\text{Max } Z$

والمتغيرين غير الأساسيين هما :  $x_1, x_4$  لهما معاملات موجبة فى

صف دالة الهدف ،  $(-Z)$  ، فىكون الحل غير أمثل ويقبل التحسين .

وفقا لطريقة السمبلكس الأساسية يتم اختيار المتغير  $x_4$  كمتغير

داخل ، واختيار المتغير  $x_3$  كمتغير خارج وننتقل إلى الجولة

التالية :

المتغيرات الأساسية	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	الثوابت
$x_4$	1.5	0	0.5	1	0	7
$x_2$	2.5	1	0.5	0	0	12
$x_5$	1	0	0	0	1	4
- Z	- 12.5	0	- 7.5	0	0	- 180

حيث أن المتغيرين غير الأساسيين وهما :  $x_1$  ,  $x_3$  لهما معاملات سالبة في صف (- Z) فيكون الحل الحالي هو الحل الأمثل :

القيم المثلى لمتغيرات النموذج الأصلي هي :

$$x_5^* = 4 , \quad x_4^* = 7 , \quad x_2^* = 12$$

$$\text{بينما } Z = 180 , \quad x_1^* = x_3^* = 0$$

٢ - لاستنتاج نموذج المبدول للنموذج الأصلي :

حيث أن دالة الهدف في النموذج الأصلي ( $x_i$ ) على صورة :

$\text{Max } Z$  لذا ينبغي أن تكون كافة القيود الهيكلية في النموذج على

صورة أصغر من أو يساوي كما يلي :

$$5 x_1 + 2 x_2 \leq 24$$

$$- x_1 - x_2 \leq -5$$

$$x_1 \leq 4$$

يأخذ نموذج المبدول ( $y_i$ ) الصورة التالية :

$$\text{Min } Z = 24 y_1 - 5 y_2 + 4 y_3$$

بشرط أن :

$$5 y_1 - y_2 + y_3 \geq 25$$

$$2 y_1 - y_2 \geq 15$$

$$y_i \geq 0 , \quad (i = 1, 2, 3)$$

لاشتقاق القيم المتلى لمتغيرات نموذج المبدول ، فمن المعلوم أن :

$$y_j^* = x_{n+j}$$

وحيث أن  $n = 2$  فإن :

$$y_j^* = x_{2+j}$$

$$y_1^* = x_3 = 7.5$$

$$y_2^* = x_4 = 0$$

$$y_3^* = x_5 = 0$$

$$y_4^* = x_1 = 12.5$$

$$y_5^* = x_2 = 0$$

$$Z(y_j) = 180$$

٣ - ١ - لإختبار حساسية الحل الأمثل للنموذج الأصلي إذا نقص

معامل المتغير  $x_2$  بدالة الهدف بمقدار 4 .

بلاحظ أن المتغير  $x_2$  بعد متغيراً أساسياً في جدول الحل الأمثل ،

وقيمة التغير في معامل  $x_2$  يساوى -4 ، لذلك فإن :

### البرمجة الخطية

صف  $x_2$  مضروباً في عكس التغير ( أى مضروباً في 4 ) هو :

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	الثوابت
$x_1$	10	4	2	0	0	48

صف  $(-Z)$  بعد إدخال قيمة التغير به هو :

$-Z$	-12.5	-4	-7.5	0	0	-180
------	-------	----	------	---	---	------

بجمع العناصر المتناظرة بالصفين نحصل على صف  $(-Z)$  الجديد وهو :

$-Z$	-2.5	0	-5.5	0	0	-132
------	------	---	------	---	---	------

حيث أن المتغيرين غير الأساسيين  $x_3$  ،  $x_1$  مازالت معاملتهما سالبة في صف دالة الهدف ، فيظل الحل للحالي أمثل .

ب - إذا أصبح القيد الأول على الصورة :

$$3x_1 + 2x_2 \leq 24$$

تغير معامل  $x_1$  بالقيد الأول ( أى  $a_{11}$  ) من 5 إلى 3 ، ومن ثم فإن قيمة التغير في معامل  $x_1$  بالقيد الأول هي  $(-2)$  ، كما أن متمم القيد الأول هو المتغير  $x_3$  . ولإختبار حساسية الحل الأمثل لهذا التغير فإن :

### البرمجة الخطية

المتغيرات الأساسية	عمود $x_1$ الجديد = قيمة المتغير $\times$ عمود $x_3$ + عمود $x_1$
$x_4$	$1.5 + 0.5 \times (-2) = 0.5$
$x_2$	$2.5 + 0.5 \times (-2) = 1.5$
$x_5$	$1 + 0 \times (-2) = 1$
$-Z$	$-12.5 + -7.2 \times (-2) = 2.5$

وحيث أن معامل المتغير  $x_1$  الجديد في صف دالة الهدف  $(-Z)$  أصبح مساويا 2.5 أى أصبح ذا قيمة موجبة وبالتالي فإن الحل الأمثل الحالي سوف يفقد أمثليته ويمكن تحسينه على النحو التالي :

المتغيرات الأساسية	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	الثوابت
$x_4$	0.5	0	0.5	1	0	7
$x_2$	1.5	1	0.5	0	0	12
$x_5$	1	0	0	0	1	4
$-Z$	2.5	0	-7.5	0	0	-180

وفقا لقواعد طريقة السمبلكس الأساسية يتم اختيار المتغير  $x_1$  كمتغير داخل والمتغير  $x_5$  كمتغير خارج ويتم الانتقال للجولة التالية :

المتغيرات الأساسية	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	الثوابت
$x_4$	0	0	0.5	1	-0.5	5
$x_2$	0	1	0.5	0	-1.5	6
$x_1$	1	0	0	0	1	4
-Z	0	0	-7.5	0	-2.5	-190

وكما هو واضح فإن الحل الحالي أصبح هو الحل الأمثل .

ج - اختبار حساسية الحل الأمثل الأولي إذا أضيف القيد التالي إلى النموذج الأصلي :

$$x_2 \leq 8$$

يلاحظ أن قيمة  $x_2^*$  في الحل الأمثل الأولي تساوي 12 ، وبذلك فإن الحل الأمثل الأولي لا يستوفي هذا القيد الجديد ، ومن ثم ينبغي تحويل المتباينة إلى معادلة بإضافة المتغير المتمم  $x_6$  كما يلي :

$$x_2 + x_6 = 8$$

بإضافة معاملات هذه المعادلة إلى جدول الحل الأمثل الأولي فبأخذ الصورة التالية :

## البرمجة الخطية

المتغيرات الأساسية	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	الثوابت
$x_4$	1.5	0	0.5	1	0	0	7
$x_2$	2.5	1	0.5	0	0	0	12
$x_5$	1	0	0	0	1	0	4
$x_6$	0	1	0	0	0	1	8
- Z	-12.5	0	-7.5	0	0	0	-180

وحيث أن المتغير  $x_2$  متغير أساسي فينبغي أن يكون للعنصر الواقع عند ملتقى صف  $x_2$  مع عمود  $x_2$  هو 1 وباقي عناصر عمود  $x_2$  تساوي أصفار (انظر شكل (١ - ٢)) ، ومن ثم يجب التخلص من العنصر 1 الموجود عند ملتقى صف المتغير  $x_6$  مع عمود المتغير  $x_2$  وذلك بطرح عناصر صف المتغير  $x_2$  من عناصر صف المتغير  $x_6$  بالجدول السابق كما يلي :

↓

المتغيرات الأساسية	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	الثوابت
$x_4$	1.5	0	0.5	1	0	0	7
$x_2$	2.5	1	0.5	0	0	0	12
$x_5$	1	0	0	0	1	0	4
$x_6$	-2.5	1	-0.5	0	0	1	-4
- Z	-12.5	0	-7.5	0	0	0	-180

←



بظهور قيمة سالبة فى معاملات عمود الثوابت فإن الحل الحالى لم يعد حلاً مسموحاً به ، وفقاً لقواعد طريقة مبدول السمبلكن يتم اختيار المتغير  $x_6$  كمتغير خارج والمتغير  $x_1$  كمتغير داخل وتكون جولة الحل التالية كما يلى :

المتغيرات الأساسية	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	الثوابت
$x_4$	0	0	0.2	1	0	0.6	4.6
$x_2$	0	1	0	0	0	1	8
$x_5$	0	0	-0.2	0	1	0.4	2.4
$x_1$	1	0	0.2	0	0	-0.4	1.6
- Z	0	0	-5	0	0	-5	-160

وحيث أن كافة معاملات عمود الثوابت فى جدول الحل الأخير أصبحت موجبة فإن الحل الحالى يصبح حلاً مسموحاً به ( أى حلاً ممكناً ) ، ثم بالنظر إلى المتغيرات غير الأساسية فى هذا الجدول فهما عبارة عن المتغيرين  $x_3$  و  $x_6$  ولهما معاملات سالبة فى صف دالة الهدف (- Z) ، فيكون الحل الحالى حلاً أمثل أيضاً وهو كالتالى :

$$Z = 160 , x_5^* = 2.4 , x_4^* = 4.6 , x_2^* = 8 , x_1^* = 1.6$$

١ - لتحديد نطاق التغير فى ثابت القيد الأول الذى يظل معه الحل أمثل ، يلاحظ أن المتغير المتمم للقيد الأول هو المتغير  $x_3$  ، وبفرض أن قيمة التغير فى ثابت القيد الأول هو  $h$  ، ومن ثم فإن :

المتغيرات الأساسية	عمود الثوابت الجديد - عمود الثوابت + (h) × عمود $x_3$
$x_4$	$0.5(h) + 7 = 0.5h + 7$
$x_2$	$0.5(h) + 12 = 0.5h + 12$
$x_5$	$0(h) + 4 = 4$
- Z	$-7.5(h) + (-180) = -7.5h - 180$

بمساواة معاملات عمود الثوابت الجديد بالصفر وحل المعادلات الناتجة

نحصل على ما يلي :

من صف  $x_4$  :

$$0.5h + 6 = 0$$

$$h = -14$$

إنن :

من صف  $x_2$  :

$$0.5h + 12 = 0$$

$$h = -24$$

إنن :

ومن ثم فإن :

الحد الأدنى لنطاق التفسير = -14

الحد الأعلى لنطاق التغير غير موجود أى يساوى  $\infty$

$$-14 \leq h \leq \infty$$

ويكون الحد الأدنى الذي يصل إليه ثابت القيد الأول ويظل معه  
الحل أمثل هو :

$$24 - 14 = 10$$

الحد الأعلى الذي يصل إليه ثابت القيد الأول ويظل معه الحل  
أمثل يساوى  $\infty$  .

إن : نطاق التغير في ثابت القيد الأول الذي يظل معه الحل أمثل هو :

$$\infty \geq \text{ثابت القيد الأول} \geq 10$$

ففي داخل هذا النطاق يظل الحل الأمثل الأولي أمثل كما هو ولكن  
قيمة دالة الهدف سوف تتغير بمقدار  $( - 7.5 h )$  .

1945

1945

1945

1945

1945

1945

1945

1945

1945

1945

1945

1945

1945

1945

1945

1945

## **الباب الثاني**

**برمجة الأعداد الخطية الصحيحة**

**Integer Linear Programming**

2000-2001

## الباب الثاني

### برمجة الاعداد الخطية الصحيحة

- مقدمة
- طريقة التفريع والتحديد
  - ◀ التفريع
  - ◀ التحديد

1. The first part of the document is a list of the names of the persons who have been appointed to the various positions of the Board of Directors of the Corporation.

2. The second part of the document is a list of the names of the persons who have been appointed to the various positions of the Board of Directors of the Corporation.

3. The third part of the document is a list of the names of the persons who have been appointed to the various positions of the Board of Directors of the Corporation.

4. The fourth part of the document is a list of the names of the persons who have been appointed to the various positions of the Board of Directors of the Corporation.

5. The fifth part of the document is a list of the names of the persons who have been appointed to the various positions of the Board of Directors of the Corporation.

6. The sixth part of the document is a list of the names of the persons who have been appointed to the various positions of the Board of Directors of the Corporation.

7. The seventh part of the document is a list of the names of the persons who have been appointed to the various positions of the Board of Directors of the Corporation.



## (٢-١) مقدمة :

نموذج برمجة الأعداد الصحيحة هو نموذج خطي يشترط أن تكون كل متغيراته أعداداً صحيحة ، لذلك فإن التقريب الأول لحل نموذج برمجة الأعداد الصحيحة يمكن الحصول عليه بتجاهل هذا الشرط وحل البرنامج الخطي بإحدى الطرق السابق تقديمها ، وإذا كان الحل الأمثل للبرنامج الخطي أعداداً صحيحة ، يكون هذا الحل هو نفسه الحل الأمثل لبرنامج الأعداد الصحيحة ، وإلا - وهذه هي الحالة الغالبة - فإنه يجب تقريب عناصر الحل إلى أقرب أعداد صحيحة ممكنة للحصول على تقريب آخر . وتنفذ هذه الطريقة غالباً إذا كانت قيم المتغيرات القرارية الأساسية أعداداً كبيرة وتكون هذه الطريقة غير دقيقة إذا كانت قيم المتغيرات القرارية الأساسية أعداداً صغيرة .

## (٢-٢) طريقة التفريع والتحديد

### Branch and Bound Algorithm

تعتبر هذه الطريقة من أهم الطرق المستخدمة في حل برامج الأعداد الصحيحة وأكثرها إنتشاراً .

نفرض أن لدينا البرنامج الخطي للأعداد الصحيحة التالي :

$$\text{Max } Z = \sum_{i=1}^n t_i x_i \quad (1)$$

بشرط أن :

$$\sum_{i=1}^n a_{ji} x_i \leq (\geq \text{ أو } =) c_j \quad (j = 1, 2, \dots, m) \quad (2)$$

$$x_i \text{ أعداد صحيحة} \quad (3)$$

$$x_i \geq 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (4)$$

والآن ما هو المقصود بعملية التفرع والتحديد ؟

### (٢-٢-١) التفرع

نعتبر برنامج الأعداد الصحيحة الأصلية بمثابة برنامج أول ، ونوجد الحل الأمثل لهذا التقريب ، مع إهمال القيد ( 3 ) ، أى مع إهمال شرط الأعداد الصحيحة ، وذلك باستخدام إحدى طرق السمبلكس المناسبة والتي سبق عرضها فى الباب الأول ، ويعتبر هذا الحل بمثابة تقريب أول .

فإذا كان التقريب الأول يحقق جميع قيود النموذج الأصلية بما فيها القيد ( 3 ) فيكون هذا التقريب حل أمثل ونهائى للبرنامج الأصلية . وإذا احتوى التقريب الأول على متغير غير صحيح وليكن  $x_i^* \quad (i = 1, 2, \dots, p)$  ، نفرض أن هذا المتغير يقع ضمن حدين أدنى وأعلى وهما :

$$L_i \leq x_i^* \leq U_i, \quad (i = 1, 2, \dots, p) \quad (5)$$

حيث :  $U_i$  عدد صحيح أكبر مباشرة من  $x_i^*$

$L_i$  عدد صحيح أصغر مباشرة من  $x_i^*$

$p$  عدد المتغيرات القرارية المتلى

هذا القيد الجديد يمكننا من بناء قيدين إضافيين هما :

$$x_i \geq U_i \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (6)$$

$$x_i \leq L_i \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (7)$$

بإضافة القيد ( 6 ) إلى برنامج الأعداد الصحيحة الأصلى نحصل على برنامج أعداد صحيحة ثانى ، وبإضافة القيد ( 7 ) إلى برنامج الأعداد الصحيحة الأصلى أيضاً نحصل على برنامج أعداد صحيحة ثالث .

وتسمى عملية تقريع البرنامج الأصلى إلى برنامجين ثانى وثالث بعملية " التقريع " ، ولها تأثير على تقليص منطقة الحلول الممكنة بطريقة يمكن بها حذف الحل الحالى للأعداد غير الصحيحة لـ  $x_i$  ولكنها تحافظ على كل حلول الأعداد الصحيحة الممكنة للبرنامج الأصلى .

ثم نوجد الحل الأمثل للبرنامجين المولدين : الثانى والثالث مع إهمال قيد الأعداد الصحيحة رقم ( 3 ) ، ونعتبر حل البرنامج الثانى تقريب ثان ، وحل البرنامج الثالث كتقريب ثالث . فإذا كان أحد هذين التقريبين يحقق جميع قيود النموذج الأصلى بما فيها القيد ( 3 ) ويعطى قيمة أكبر لدالة الهدف من التقريب الآخر وذلك فى حالة تعظيم دالة الهدف ( أو قيمة أصغر فى حالة تصغير وتكنية دالة الهدف). فى هذه الحالة يعتبر هذا التقريب كحل أمثل ونهائى للنموذج الأصلى ، وتنتهى عملية التقريع . وفى الحالة الأخرى ، تستمر عملية التقريع بنفس الأسلوب المذكور .

وإذا كان هناك أكثر من برنامج يمكن أن تجرى منه عملية التفرع ، نختار البرنامج الذي له أكبر قيمة لدالة الهدف وذلك فى حالة التعظيم ، والبرنامج الذى له أصغر قيمة لدالة الهدف وذلك فى حالة التكنية أو التصغير ، ونبنى القيدى الإضافيين ( 6 ) ، ( 7 ) فى كل مرة لكل متغير غير صحيح ونضيفهما إلى البرنامج الحالى واحداً فى كل مرة للحصول على برنامجين فرعيين جديدين .

وإذا أحتوى البرنامج الحالى على أكثر من متغير واحد غير صحيح ( ويطلب أن يكون عدداً صحيحاً ) ، نفرض القيدى الإضافيين الجديدين على المتغير الذى غالباً ما يكون عدداً صحيحاً ، بمعنى أن المتغير الذى يقترب جزء الكسر فيه من 0.5 ، ولو حدث تساوى فى الجزء الكسرى ، يتم اختيار المتغير بطريقة عشوائية .

## (٢-٢-٢) التحديد

بفرض أن المطلوب هو تعظيم دالة الهدف ، فإن التفرع يستمر حتى الحصول على حل الأعداد الصحيحة الأول (الذى يكون حل أعداد صحيحة ) وتصبح قيمة دالة الهدف لحل الأعداد الصحيحة الأول هى الحد الأدنى للبرنامج ، وكل البرامج التى تؤدى حلولها الأولى سواء أكانت أعداداً صحيحة أم لا - إلى قيم لدالة الهدف أصغر من الحد الأدنى ، تصبح ملفاة .

وتستمر عملية التفرع من البرامج التى لها تقريب (حل) أعداد غير صحيحة والتى تعطى قيمة لدالة الهدف أكبر من الحد الأدنى.

ويستمر الحد الأدنى الحالي كحد أدنى لتقريب جديد إذا لم يعط هذا التقريب تقريب أعداد صحيحة ذا قيمة أكبر لدالة الهدف . أم إذا ظهر تقريب أعداد صحيحة جديد ذا قيمة أكبر لدالة الهدف فيعتبر كحد أدنى جديد ويلغى بالتالي النموذج الذي نتج عنه الحد الأدنى القديم ، وكذلك جميع النماذج التي تعطي تقريباً ذا قيمة لدالة الهدف أصغر من الحد الأدنى الجديد .

وتستمر عملية التقريب إلى أن تختفى النماذج التي لها تقريب أعداد غير صحيحة ، وفي هذه الحالة ، فإن حل الحد الأدنى الحالي هو الحل الأمثل لنموذج الأعداد الصحيحة .

وفي حالة تصغير دالة الهدف تطبق الطريقة نفسها ، ما عدا أن الحد الأعلى يستخدم ، لذلك فإن قيمة حل الأعداد الصحيحة الأول يصبح حداً أعلى للبرنامج ، وتلغى كل البرامج التي تؤدي إلى قيم لدالة الهدف أكبر من الحد الأعلى .

### مثال (١) :

نفرض أن لدينا البرنامج الخطي التالي :

$$\text{Max } Z = 4x_1 + 2x_2 + x_3$$

بشرط أن :

$$3x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 8$$

المطلوب : حل البرنامج باستخدام طريقة السمبلكس .

**الحل :**

بإهمال شرط الأعداد الصحيحة ، وباستخدام طريقة السمبلكس الأساسية لحل البرنامج على النحو التالي :

يتم تحويل القيد إلى معادلة بإضافة متغير متمم وهو  $x_4$  كما يلي :

$$3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 8$$

وتكون جولات الحل على النحو التالي :

**الجولة الأولى :**

الثابت	$x_4$	$x_3$	$x_2$	$x_1$	المتغيرات الأساسية
8	1	3	2	3	$x_4$
0	0	1	2	4	-Z

بتطبيق قواعد طريقة السمبلكس العادية نخرج المتغير  $x_4$  وندخل المتغير  $x_1$  بدلاً منه ، وننتقل إلى الجولة الثانية .

**الجولة الثانية :**

الثابت	$x_4$	$x_3$	$x_2$	$x_1$	المتغيرات الأساسية
$\frac{8}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	1	$x_1$
$-\frac{32}{3}$	$-\frac{4}{3}$	-3	$-\frac{3}{2}$	0	-Z

### برمجة الأمثل الخطية

وحيث أن معاملات المتغيرات غير الأساسية وهي معاملات المتغيرات  $x_2, x_3, x_4$  بصف دالة الهدف ،  $(-Z)$  ، كلها سالبة ، فيكون الحل الحالي هو الحل الأمثل للبرنامج ، وهو كما يلي :

$$Z = 10.67 , \quad x_1^* = \frac{8}{3} = 2.67$$

هذا الحل يعتبر حل أعداد غير صحيحة ، وحيث أن  $2 < x_1^* < 3$  ، لذلك يستخدم تقريعين جديدين هما :  $x_1 \geq 3$  ،  $x_1 \leq 2$  ، وينشأ لدينا البرنامجين الفرعيين التاليين :

البرنامج الثالث	البرنامج الثاني
$\text{Max } Z = 4x_1 + 2x_2 + x_3$ بشرط أن : $3x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 8$ $x_1 \geq 3$ $x_3, x_2, x_1$ أعداد صحيحة وغير سالبة	$\text{Max } Z = 4x_1 + 2x_2 + x_3$ بشرط أن : $3x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 8$ $x_1 \leq 2$ $x_3, x_2, x_1$ أعداد صحيحة وغير سالبة

بأخذ البرنامج الفرعي الثاني ، وإهمال شرط الأعداد الصحيحة نستخدم طريقة السمبلكس الأساسية لحل البرنامج حيث يتم إضافة متغير متمم لكل قيد على النحو التالي :

$$\text{Max } Z = 4x_1 + 2x_2 + x_3$$

بشرط أن :

$$3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 8$$

$$x_1 + x_5 = 2$$

الجولة الأولى :

المتغيرات الأساسية	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	الثوابت
$x_4$	3	2	3	1	0	8
$x_5$	1	0	0	0	1	2
-Z	4	2	1	0	0	0

بتطبيق قواعد طريقة السمبلكس الأساسية نخرج المتغير  $x_5$  وندخل المتغير  $x_1$  بدلاً منه .

الجولة الثانية :

المتغيرات الأساسية	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	الثوابت
$x_4$	0	2	3	1	-3	2
$x_1$	1	0	0	0	1	2
-Z	0	2	1	0	-4	-8

ثم نخرج المتغير  $x_4$  وندخل المتغير  $x_2$  بدلاً منه .



### الجولة الثالثة :

المتغيرات الأساسية	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	الثوابت
$x_2$	0	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	1
$x_1$	1	0	0	0	1	2
$-Z$	0	0	-2	-1	-1	-10

نلاحظ أن المتغيرات غير الأساسية وهي :  $x_3$  ,  $x_4$  ,  $x_5$  أصبحت لها معاملات سالبة في صف دالة الهدف ،  $(-Z)$  ، فيكون الحل الحالي حلاً أمثل وهو :

$$Z = 10 \quad , \quad x_2^* = 1 \quad , \quad x_1^* = 2$$

وهذا الحل هو أول حل أعداد صحيحة يقابلنا ، لذلك فإن

$Z = 10$  تصبح الحد الأدنى للنموذج المدروس ، ولن أى حل يؤدي إلى قيمة لدالة الهدف ،  $Z$  ، أقل من 10 يجب أن يُلغى .

ننتقل بعد ذلك إلى البرنامج الفرعي التالي وهو البرنامج الثالث، حيث :

### البرنامج الثالث :

بتجاهل شرط الأعداد الصحيحة ، وبضرب طرفي القيد الثاني في  $-1$  ، ثم بإضافة المتغيرات المتممة لنعود البرنامج نحصل على الشكل التالي :

$$\text{Max } Z = 4x_1 + 2x_2 + x_3$$

بشرط أن :

$$3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 8$$

$$-x_1 + x_5 = -3$$

ثم تستمر جولات الحل على النحو التالي :

الجولة الأولى :

المتغيرات الأساسية	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	الثوابت
$x_4$	3	2	3	1	0	8
$x_5$	-1	0	0	0	1	-3
$-Z$	4	2	1	0	0	0

يظهر قيمة سالبة في عمود الثوابت ، فيكون الحل الحالي غير ممكن ،

لذلك سوف نستخدم طريقة مبدول السمبلكس حيث نخرج المتغير  $x_5$  وندخل

المتغير  $x_1$  بدلاً منه كما يتضح في الجولة التالية .

الجولة الثانية :

المتغيرات الأساسية	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	الثوابت
$x_4$	0	2	3	1	3	-1
$x_1$	1	0	0	0	-1	3
$-Z$	0	2	1	0	4	-12

بظهور قيمة سالبة وهى (1 -) فى عمود الثوابت بصف  $x_4$  تجعل الحل الحالى غير ممكن ، وبتطبيق قواعد طريقة مبدول السمبلكس ، فيكون صف المتغير  $x_4$  هو الصف المحورى ويعنى ذلك أن المتغير  $x_4$  هو المتغير الذى سوف يخرج ، ولتحديد العمود المحورى ( أى عمود المتغير الداخلى ) نقسم عناصر صف (Z -) على عناصر الصف المحورى السالبة فقط ، وحيث لا توجد عناصر سالبة بصف  $x_4$  للقسمه عليها ، فلا توجد إمكانية لتحويل الحل الحالى من حل غير ممكن إلى حل ممكن ، ويكون البرنامج الثالث ليس له حل .

وحيث أنه قد انتهت كل التفريعات الممكنة ولا توجد تقريعات تالية فيكون الحل الأمثل للنموذج هو التقريب الأول للبرنامج الثانى وهو كما يلى :

$$Z = 10 , \quad x_2^* = 1 , \quad x_1^* = 2$$

### مثال (٢) :

حل البرنامج الخطى التالى :

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 2x_2$$

بشرط أن :

$$2x_1 + x_2 \leq 6$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 9$$

$x_1, x_2$  أعداد صحيحة ولا سالبة

الحل :

بإهمال شرط الأعداد الصحيحة وباستخدام طريقة السمبلكس

الأساسية لحل البرنامج ، حيث نضيف متغير منتم لكل قيد كما يلي :

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 6$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_4 = 9$$

وتستمر جولات الحل على النحو التالي :

الجولة الأولى :

المتغيرات الأساسية	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	الثوابت
$x_3$	2	1	1	0	6
$x_4$	2	3	0	1	9
-Z	3	4	0	0	0

نخرج المتغير  $x_4$  وندخل المتغير  $x_2$  بدلاً منه ثم ننقل إلى

الجولة التالية :

الجدولة الثانية :

المتغيرات الأساسية	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	الثوابت
$x_3$	$\frac{4}{3}$	0	1	$-\frac{1}{3}$	3
$x_2$	$\frac{2}{3}$	1	0	$\frac{1}{3}$	3
-Z	$\frac{1}{3}$	0	0	$-\frac{4}{3}$	-12

نخرج المتغير  $x_3$  وندخل المتغير  $x_1$  بدلاً منه وتكون الجدولة

التالية في الحل هي :

الجدولة الثالثة :

المتغيرات الأساسية	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	الثوابت
$x_1$	1	0	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{9}{4}$
$x_2$	0	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
-Z	0	0	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{5}{4}$	$-12\frac{3}{4}$

وحيث أن المتغيرين غير الأساسيين وهما :  $x_3$  ,  $x_4$  أصبح  
لهما معاملين سالبين في صف  $(-Z)$  ، فيكون الحل الحالي هو الحل  
الأمثل للبرنامج وهو كما يلي :

$$Z = 12.75 \quad , \quad x_2^* = \frac{3}{2} = 1.5 \quad , \quad x_1^* = \frac{9}{4} = 2.25$$

وحيث أن الجزء الكسرى لـ  $x_2^*$  هو الأقرب إلى 0,5 ، لذلك  
يستخدم هذا المتغير لتكوين تفرعين جديدين هما :  $x_2 \leq 1$  ,  $x_2 \geq 2$  وينشأ  
برنامجين فرعيين هما :

البرنامج الثاني	البرنامج الثالث
$\text{Max } Z = 3x_1 + 4x_2$ بشرط أن : $2x_1 + x_2 \leq 6$ $2x_1 + 3x_2 \leq 9$ $x_2 \leq 1$ $x_2, x_1$ أعداد صحيحة وغير سالبة	$\text{Max } Z = 3x_1 + 4x_2$ بشرط أن : $2x_1 + x_2 \leq 6$ $2x_1 + 3x_2 \leq 9$ $x_2 \geq 2$ $x_2, x_1$ أعداد صحيحة وغير سالبة

بأخذ البرنامج الفرعي الثاني وإهمال شرط الأعداد الصحيحة ،  
نستخدم طريقة السمبلكس العادية لحل البرنامج على النحو التالي :

## مربع المصادر المتاحة

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 4x_2$$

بشرط أن :

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 6$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_4 = 9$$

$$x_2 + x_5 = 1$$

وتستمر جولات الحل وفقا لطريقة السمبلكس الأساسية على

النحو التالي :

الجولة الأولى :

↓

المتغيرات الأساسية	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>3</sub>	x <sub>4</sub>	x <sub>5</sub>	الثوابت
x <sub>3</sub>	2	1	1	0	0	6
x <sub>4</sub>	2	3	0	1	0	9
x <sub>5</sub>	0	1	0	0	1	1
-Z	3	4	0	0	0	0

←

نخرج المتغير x<sub>5</sub> وندخل المتغير x<sub>2</sub> بدلا منه وننتقل إلى

الجولة التالية .

الجولة الثانية :

المتغيرات الأساسية	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	الثوابت
$x_3$	2	0	1	0	-1	5
$x_4$	2	0	0	1	-3	6
$x_2$	0	1	0	0	1	1
-Z	3	0	0	0	-4	-4

بتطبيق قواعد السمبلكس نخرج المتغير  $x_3$  وندخل المتغير  $x_1$  بدلاً منه وننتقل إلى الجولة التالية .

الجولة الثالثة :

المتغيرات الأساسية	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	الثوابت
$x_1$	1	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	2.5
$x_4$	0	0	-1	1	-2	1
$x_2$	0	1	0	0	1	1
-Z	0	0	$-\frac{3}{2}$	0	$-\frac{5}{2}$	-11.5



بتطبيق قواعد الأمثلية يلاحظ أن المتغيرين غير الأساسيين وهما  $x_3, x_5$  لهما معاملين سالبين في صف  $(-Z)$  ، فيكون الحل الحالي هو الحل الأمثل ، ومن ثم فإن الحل الأولي للبرنامج الفرعى الثانى هو :

$$Z = 11.5 , \quad x_2^* = 1 , \quad x_1^* = 2.5$$

بأخذ البرنامج الفرعى الثالث ، وإهمال شرط الأعداد الصحيحة ، وباستخدام أسلوب السمبلكس بطريقة المبدول لحل البرنامج على الصورة التالية :

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 4x_2$$

بشرط أن :

$$2x_1 + x_2 \leq 6$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 9$$

$$-x_2 \leq -2$$

بإضافة المتغيرات المتممة إلى القيود الهيكلية السابقة تصبح كما يلى :

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 6$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_4 = 9$$

$$-x_2 + x_5 = -2$$

وتكون جولات السمبلكس على النحو التالى :

الجدول الأولي :

المتغيرات الأساسية	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	الثوابت
$x_3$	2	1	1	0	0	6
$x_4$	2	3	0	1	0	9
$x_5$	0	-1	0	0	1	-2
$-Z$	3	4	0	0	0	0

كما هو واضح فإن الحل الحالي غير ممكن نظراً لوجود قيمة سالبة في عمود الثوابت ، وبتطبيق قواعد طريقة مبدول السمبلكس نخرج المتغير  $x_5$  وندخل المتغير  $x_2$  بدلاً منه وننتقل إلى الجدول التالية .

الجدول الثانية :

المتغيرات الأساسية	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	الثوابت
$x_3$	2	0	1	0	1	4
$x_4$	2	0	0	1	3	3
$x_2$	0	1	0	0	-1	2
$-Z$	3	0	0	0	4	-8

الحل الحالي أصبح حلاً ممكناً نظراً لأن قيم عمود الثوابت أصبحت موجبة لذلك نطبق قواعد طريقة السمبلكس الأساسية فنخرج المتغير  $x_4$  وندخل بدلاً منه المتغير  $x_5$  وتكون الجولة التالية كما يلي :

الجولة الثالثة :

المتغيرات الأساسية	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	الثوابت
$x_3$	$\frac{4}{3}$	0	1	$-\frac{1}{3}$	0	3
$x_5$	$\frac{2}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	1	1
$x_2$	$\frac{2}{3}$	1	0	$\frac{1}{3}$	0	3
-Z	$\frac{1}{3}$	0	0	$-\frac{4}{3}$	0	-12

نخرج "متغير"  $x_5$  وندخل المتغير  $x_1$  بدلاً منه وننتقل للجولة التالية .

الجولة الرابعة :

المتغيرات الأساسية	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	الثوابت
$x_3$	0	0	1	-1	-2	1
$x_1$	1	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$
$x_2$	0	1	0	0	-1	2
-Z	0	0	0	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-12.5

حيث أن المتغيرات غير الأساسية أصبح لها معاملات سالبة في صف دالة الهدف ، (- Z) ، فيكون الحل الحالي أمثل ، وبالتالي فإن التقريب الأولي للبرنامج الفرعي الثالث هو :

$$Z = 12.5 \quad , \quad x_2^* = 2 \quad , \quad x_1^* = 1.5$$

وحيث أن البرنامجين الثاني والثالث لهما تقريب أو حل غير صحيح ، لذا يمكن التفرع من أحدهما ، ونختار البرنامج الثالث لأن له قيمة أكبر لدالة الهدف ( أقرب إلى الأمثلية ) وهنا يكون :

$$1 < x_1^* < 2$$

ويكون البرنامجين الفرعيين الجديدين هما :

البرنامج الخامس	البرنامج الرابع
$\text{Max } Z = 3x_1 + 4x_2$ بشرط أن : $2x_1 + x_2 \leq 6$ $2x_1 + 3x_2 \leq 9$ $x_2 \geq 2$ $x_1 \geq 2$ $x_2, x_1$ أعداد صحيحة ولا سالبة	$\text{Max } Z = 3x_1 + 4x_2$ بشرط أن : $2x_1 + x_2 \leq 6$ $2x_1 + 3x_2 \leq 9$ $x_2 \geq 2$ $x_1 \leq 1$ $x_2, x_1$ أعداد صحيحة ولا سالبة

بأخذ البرنامج الفرعي الرابع : بتجاهل شرط الأعداد الصحيحة، وبضرب طرفي القيد الثالث في (1-) وإضافة المتغيرات المتممة لتحويل المتباينات إلى معادلات كما يلي :

$$\begin{aligned}
 2x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\
 2x_1 + 3x_2 + x_4 &= 9 \\
 -x_2 + x_5 &= -2 \\
 x_1 + x_6 &= 1
 \end{aligned}$$

وتجرى جولات الحل باستخدام طريقة مبدول السمبلز على النحو التالي :

الجولة الأولى :

المتغيرات الأساسية	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	الثوابت
$x_3$	2	1	1	0	0	0	6
$x_4$	2	3	0	1	0	0	9
$x_5$	0	-1	0	0	1	0	-2
$x_6$	1	0	0	0	0	1	1
-Z	3	4	0	0	0	0	0

ثم نخرج المتغير  $x_5$  ندخل المتغير  $x_2$  بدلاً منه وننتقل إلى جولة الحل التالية .

الجولة الثانية :

المتغيرات الأساسية	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	الثوابت
$x_3$	2	0	1	0	1	0	4
$x_4$	2	0	0	1	3	0	3
$x_2$	0	1	0	0	-1	0	2
$x_6$	1	0	0	0	0	1	1
-Z	3	0	0	0	4	0	-8

نخرج المتغير  $x_4$  ندخل المتغير  $x_5$  بدلاً منه وننتقل إلى  
للجولة التالية .

للجولة الثالثة :

المتغيرات الأمثلية	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	الثوابت
$x_3$	$\frac{4}{3}$	0	1	$-\frac{1}{3}$	0	0	3
$x_5$	$\frac{2}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	1	0	1
$x_2$	$\frac{2}{3}$	1	0	$\frac{1}{3}$	0	0	3
$x_6$	1	0	0	0	0	1	1
-Z	$\frac{1}{3}$	0	0	$-\frac{4}{3}$	0	0	-12

ثم نخرج المتغير  $x_6$  ندخل المتغير  $x_1$  بدلاً منه وننتقل  
للجولة التالية .

الجولة الرابعة :

المتغيرات الأساسية	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	الثوابت
$x_3$	0	0	1	$-\frac{1}{3}$	0	$-\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$
$x_5$	0	0	0	$\frac{1}{3}$	1	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
$x_2$	0	1	0	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{7}{3}$
$x_1$	1	0	0	0	0	1	1
$-Z$	0	0	0	$-\frac{4}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{37}{3}$

بتطبيق قواعد الأمثلية يلاحظ أن الحل الحالي هو الحل الأمثل ،  
ويكون التقريب الأولي للبرنامج الفرعي الرابع كما يلي :

$$Z = 12.33 \quad , \quad x_2^* = 2.33 \quad , \quad x_1^* = 1$$

نتجه بعد ذلك إلى البرنامج الفرعي الخامس .

بتجاهل شرط الأعدلا الصحيحة ، وبضرب طرفي كل من  
القيدين الثالث والرابع في (1 -) ثم بإضافة المتغيرات المتممة لتحويل  
المتباينات إلى معادلات نحصل على ما يلي :



$$2x_1 + x_2 + x_3 = 6$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_4 = 9$$

$$-x_2 + x_5 = -2$$

$$-x_1 + x_6 = -2$$

تستمر بعد ذلك جولات الحل على النحو التالي :

الجولة الأولى :

المتغيرات الأساسية	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	الثوابت
$x_3$	2	1	1	0	0	0	6
$x_4$	2	3	0	1	0	0	9
$x_5$	0	-1	0	0	1	0	-2
$x_6$	-1	0	0	0	0	1	-2
-Z	3	4	0	0	0	0	0

بوجود قيم سالبة في عمود الثوابت يكون الحل غير ممكن ، لذا

نطبق قواعد طريقة مبدول الممبلكن فيخرج المتغير  $x_5$  ويدخل

بدلاً منه المتغير  $x_2$  ويتم الانتقال إلى الجولة التالية :

الجولة الثانية :

المتغيرات الأساسية	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	الثوابت
$x_3$	2	0	1	0	1	0	4
$x_4$	2	0	0	1	3	0	3
$x_2$	0	1	0	0	-1	0	2
$x_1$	-1	0	0	0	0	1	-2
-Z	3	0	0	0	4	0	-8

نخرج المتغير  $x_6$  وننقل المتغير  $x_1$  بدلاً منه وننتقل إلى الجولة

التالية.

الجولة الثالثة :

المتغيرات الأساسية	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	الثوابت
$x_3$	0	0	1	0	1	2	0
$x_4$	0	0	0	1	3	2	-1
$x_2$	0	1	0	0	-1	0	2
$x_1$	1	0	0	0	0	-1	2
-Z	0	0	0	0	4	3	-14

الحل الحالى غير ممكن نظراً لظهور قيمة سالبة فى عمود الثوابت ( فى صف المتغير  $x_4$  ) ، وبتطبيق قواعد طريقة مبدول السمبلكس فيكون الصف الثانى هو الصف المحورى ، ولتحديد العمود المحورى نقسم عناصر صف  $(Z -)$  على عناصر الصف المحورى السالبة ، فيلاحظ أنه لا توجد عناصر سالبة يمكن القسمة عليها ويعنى ذلك أنه لا توجد إمكانية لتحويل الحل الحالى من حل غير ممكن إلى حل ممكن ، وعلى ذلك فإن البرنامج الخامس ليس له حل .

وتستمر عملية التفريغ من أى من البرنامجين الثانى أو الرابع ، فنختار البرنامج الرابع حيث له قيمة أكبر لدالة الهدف ، وهنا يلاحظ أن :

$$2 < x_2^* < 3$$

ونحصل على برنامجين فرعيين جديدين كما يلى :

البرنامج السابع	البرنامج السادس
$\text{Max } Z = 3x_1 + 4x_2$ بشرط أن : $2x_1 + x_2 \leq 6$ $2x_1 + 3x_2 \leq 9$ $x_2 \geq 2$ $x_1 \leq 1$ $x_2 \geq 3$ $x_1, x_2$ أعداد صحيحة ولا سالبة	$\text{Max } Z = 3x_1 + 4x_2$ بشرط أن : $2x_1 + x_2 \leq 6$ $2x_1 + 3x_2 \leq 9$ $x_2 \geq 2$ $x_1 \leq 1$ $x_2 \leq 2$ $x_1, x_2$ أعداد صحيحة ولا سالبة

### البرنامج السادس :

بتجاهل شرط الأعداد الصحيحة وبضرب طرفي القيد الثالث في (1-) لتحويل المتباينة إلى صورة أقل من أو يساوي (أي  $\leq$ ) ، ثم نضيف متغير متم لكل قيد من القيود الخمسة نحصل على ما يلي :

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 6$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_4 = 9$$

$$-x_2 + x_5 = -2$$

$$x_1 + x_6 = 1$$

$$x_2 + x_7 = 2$$

نستمر جولات الحل كما يلي :

### الجولة الأولى :

التغيرات الأساسية	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	الثوابت
$x_3$	2	1	1	0	0	0	0	6
$x_4$	2	3	0	1	0	0	0	9
$x_5$	0	-1	0	0	1	0	0	-2
$x_6$	1	0	0	0	0	1	0	1
$x_7$	0	1	0	0	0	0	1	2
-Z	3	4	0	0	0	0	0	0

وفقاً لقواعد طريقة مبدول السمبلكس نخرج المتغير  $x_5$  وندخل المتغير  $x_2$  بدلاً منه وننتقل إلى الجولة الثانية .

الجولة الثانية :

المتغيرات الأساسية	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	الثوابت
$x_3$	2	0	1	0	1	0	0	4
$x_4$	2	0	0	1	3	0	0	3
$x_2$	0	1	0	0	-1	0	0	2
$x_6$	1	0	0	0	0	1	0	1
$x_7$	0	0	0	0	1	0	1	0
-Z	3	0	0	0	4	0	0	-8

وحيث اختفت القيم السالبة في عمود الثوابت ، لذلك ووفقاً لقواعد طريقة السمبلكس الأساسية يخرج المتغير  $x_7$  ويدخل بدلاً منه المتغير  $x_5$  ، ويتم الانتقال إلى الجولة الثالثة .

الجولة الثالثة :

المتغيرات الأساسية	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	الثوابت
$x_3$	2	0	1	0	0	0	-1	4
$x_4$	2	0	0	1	0	0	-3	3
$x_2$	0	1	0	0	0	0	1	2
$x_6$	1	0	0	0	0	1	0	1
$x_5$	0	0	0	0	1	0	1	0
-Z	3	0	0	0	0	0	-4	-8

يتم إخراج المتغير  $x_6$  وإدخال المتغير  $x_1$  بدلاً منه وننتقل إلى الجولة التالية .

الجولة الرابعة :

المتغيرات الأساسية	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	الثوابت
$x_3$	0	0	1	0	0	-2	-1	2
$x_4$	0	0	0	1	0	-2	-3	1
$x_2$	0	1	0	0	0	0	1	2
$x_1$	1	0	0	0	0	1	0	1
$x_5$	0	0	0	0	1	0	1	0
-Z	0	0	0	0	0	-3	-4	-11

وفقاً لقواعد الأمثلية وحيث أن المتغيرات غير الأساسية أصبح لها معاملات سالبة في صف ( $Z$  -) فيكون الحل الحالي هو الحل الأمثل .

ويكون التقريب الأولي للبرنامج السادس كما يلي :

$$Z = 11 , \quad x_2^* = 2 , \quad x_1^* = 1$$

وحيث أن هذا الحل هو أول حل أعداد صحيحة يقابلنا ، لذلك فإن  $Z = 11$  يصبح الحد الأدنى للنموذج المدروس ، ولن أي حل يؤدي إلى قيمة لدالة الهدف ،  $Z$  ، أقل من 11 يجب أن يلقى .

ننتقل بعد ذلك إلى البرنامج التالي وهو :

**البرنامج السابع :**

بتجاهل شرط الأعداد الصحيحة وبضرب طرفي كل من القيدتين الثالث والخامس في ( $-1$ ) ثم بإضافة المتغيرات المتممة لقيد النموذج فإن :

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 + x_2 + x_3 & = & 6 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 & = & 9 \\ -x_2 + x_5 & = & -2 \\ x_1 + x_6 & = & 1 \\ -x_2 + x_7 & = & -3 \end{array}$$

تستمر جولات الحل كما يلي :

### الجملة الأولى :

المتغيرات الأساسية	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	الثوابت
$x_3$	2	1	1	0	0	0	0	6
$x_4$	2	3	0	1	0	0	0	9
$x_5$	0	-1	0	0	1	0	0	-2
$x_6$	1	0	0	0	0	1	0	1
$x_7$	0	-1	0	0	0	0	1	-3
-Z	3	4	0	0	0	0	0	0

بـتطـبـيـق قـوـاعـد طـرـيـقـة مـبـدول السـمـبـاكـس يـتم إـخـراج الـمـتـغـيـر X7

وإدخال المتغير  $x_2$  بدلاً منه وننتقل إلى الجولة الثانية للحل .

### الجولة الثقافية :

المتغيرات الأساسية	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	الثوابت
$x_3$	2	0	1	0	0	0	1	3
$x_4$	2	0	0	1	0	0	3	0
$x_5$	0	0	0	0	1	0	-1	1
$x_6$	1	0	0	0	0	1	0	1
$x_2$	0	1	0	0	0	0	-1	3
-Z	3	0	0	0	0	0	4	-12



الحل الحالي أصبح حلاً ممكناً ، وبتطبيق قواعد طريقة السمبلكس العادية يتم إخراج المتغير  $x_4$  وإدخال المتغير  $x_7$  بدلاً منه وننتقل إلى الجولة التالية .

الجولة الثالثة :

الثابت	$x_7$	$x_6$	$x_5$	$x_4$	$x_3$	$x_2$	$x_1$	المتغيرات الأساسية
3	0	0	0	$-\frac{1}{3}$	1	0	$\frac{4}{3}$	$x_3$
0	1	0	0	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{2}{3}$	$x_7$
1	0	0	1	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{2}{3}$	$x_5$
1	0	1	0	0	0	0	1	$x_6$
3	0	0	0	$\frac{1}{3}$	0	1	$\frac{2}{3}$	$x_2$
-12	0	0	0	$-\frac{4}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	-Z

يتم إخراج المتغير  $x_7$  وإدخال المتغير  $x_1$  بدلاً منه وننتقل إلى الجولة التالية .

الجولة الرابعة :

الثوابت	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	التغيرات الأساسية
$x_3$	0	0	1	-1	0	0	-2	3
$x_1$	1	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{3}{2}$	0
$x_5$	0	0	0	0	1	0	-1	1
$x_6$	0	0	0	$-\frac{1}{2}$	0	1	$-\frac{3}{2}$	1
$x_2$	0	1	0	0	0	0	-1	3
$-Z$	0	0	0	$-\frac{3}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	-12

كما هو واضح فإن الحل الحالي يعد هو الحل الأمثل ، ويكون  
التقريب الأولي للبرنامج السابع هو :

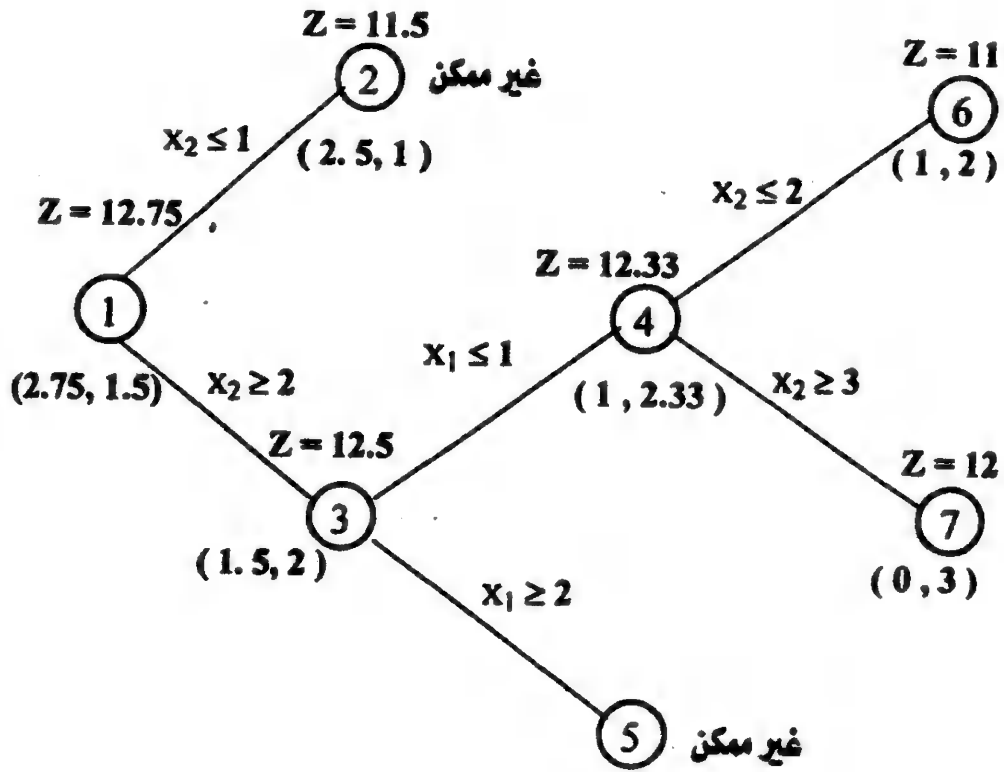
$$Z = 12 , \quad x_2^* = 3 , \quad x_1^* = 0$$

وحيث أن هذا الحل هو حل أعداد صحيحة وقيمة  $Z$  أكبر  
من الحد الأدنى الحالي ، تصبح  $Z = 12$  هو الحد الأدنى الجديد ،  
ويحذف البرنامج الذي نتج عنه الحد الأدنى القديم وهو البرنامج  
السادس من أي اعتبار لاحق ، بالمثل يتم حذف البرنامج الثاني لنفس  
السبب .

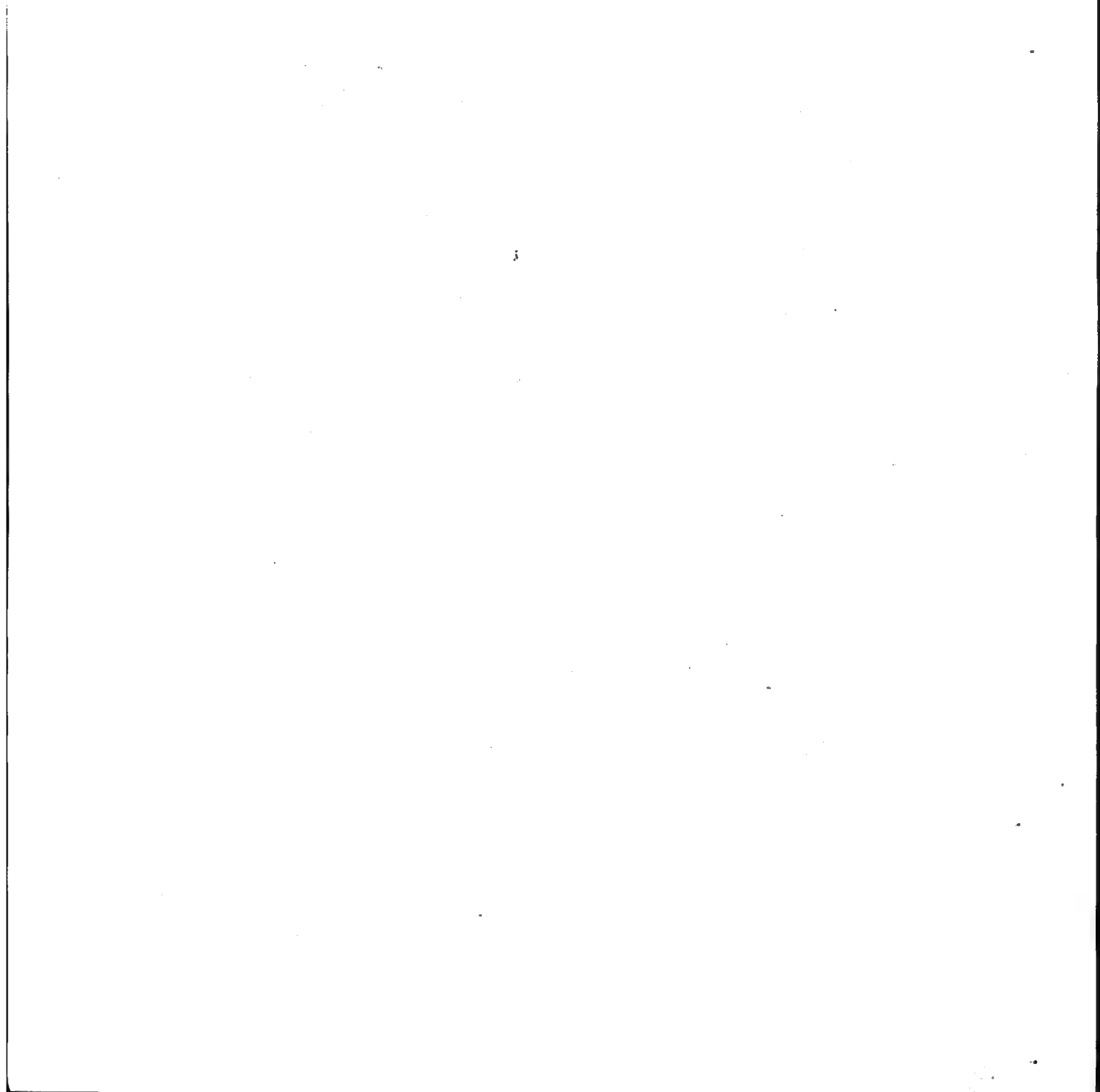
وحيث أنه قد انتهت كل التفريعات الممكنة ولا توجد تفريعات  
تالية يكون الحل الأمثل للنموذج الأصلي هو تقريب البرنامج السابع  
وهو على النحو التالي :

$$Z = 12 \quad , \quad x_2^* = 3 \quad , \quad x_1^* = 0$$

ويمكن تلخيص نتائج التفريعات السابقة على شكل شجرة كما  
هو موضح في الشكل ( ٢ - ١ ) .



شكل ( ٢ - ١ )

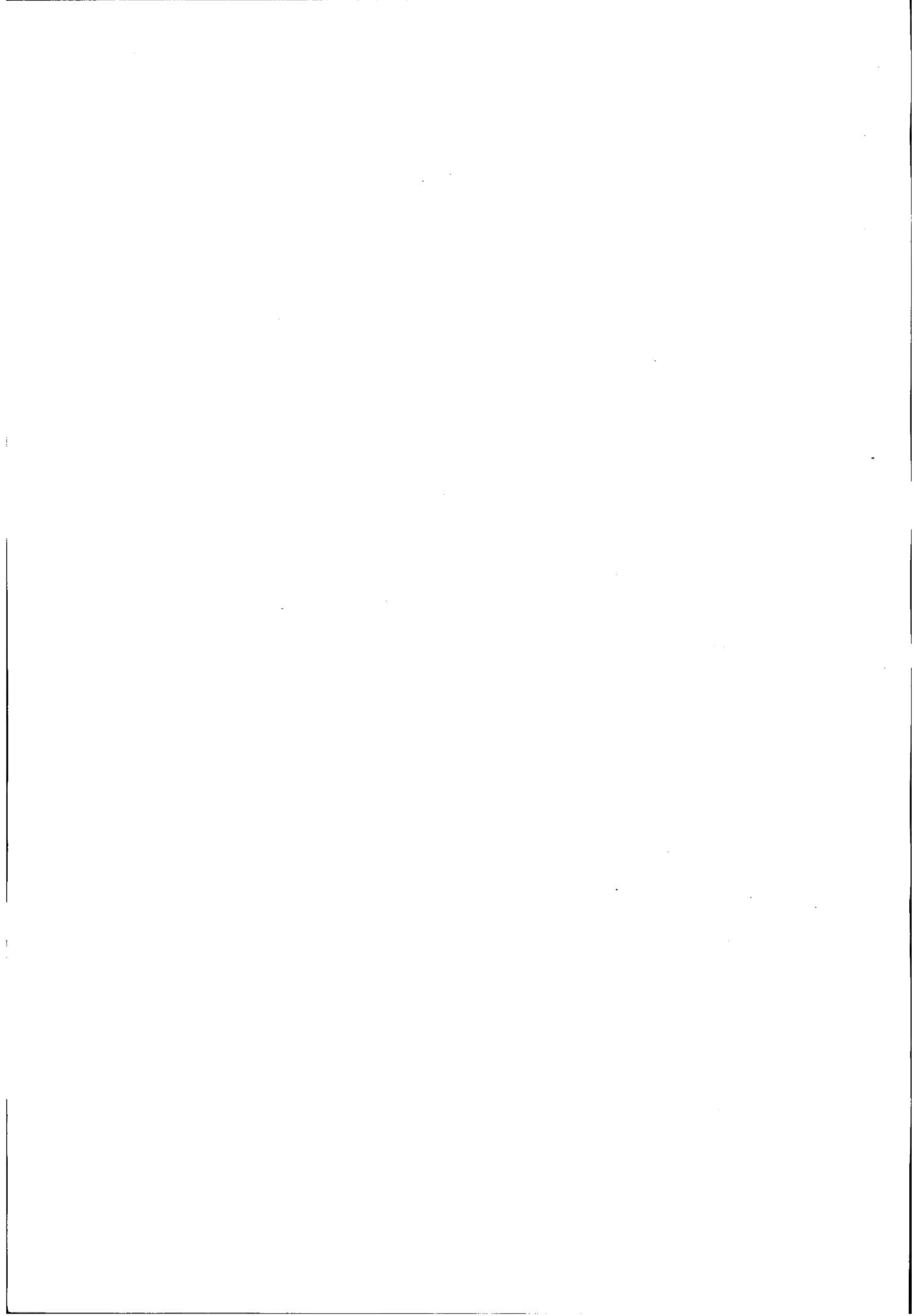


## **الباب الثالث**

### **نماذج النقل والتخصيص**

### **الصياغة والحل**

**Transportation and Assignment Models:  
Formulation and Solution**



## نماذج النقل والتخصيص

### ■ نماذج النقل

◀ صياغة نماذج النقل

◀ حل نماذج النقل

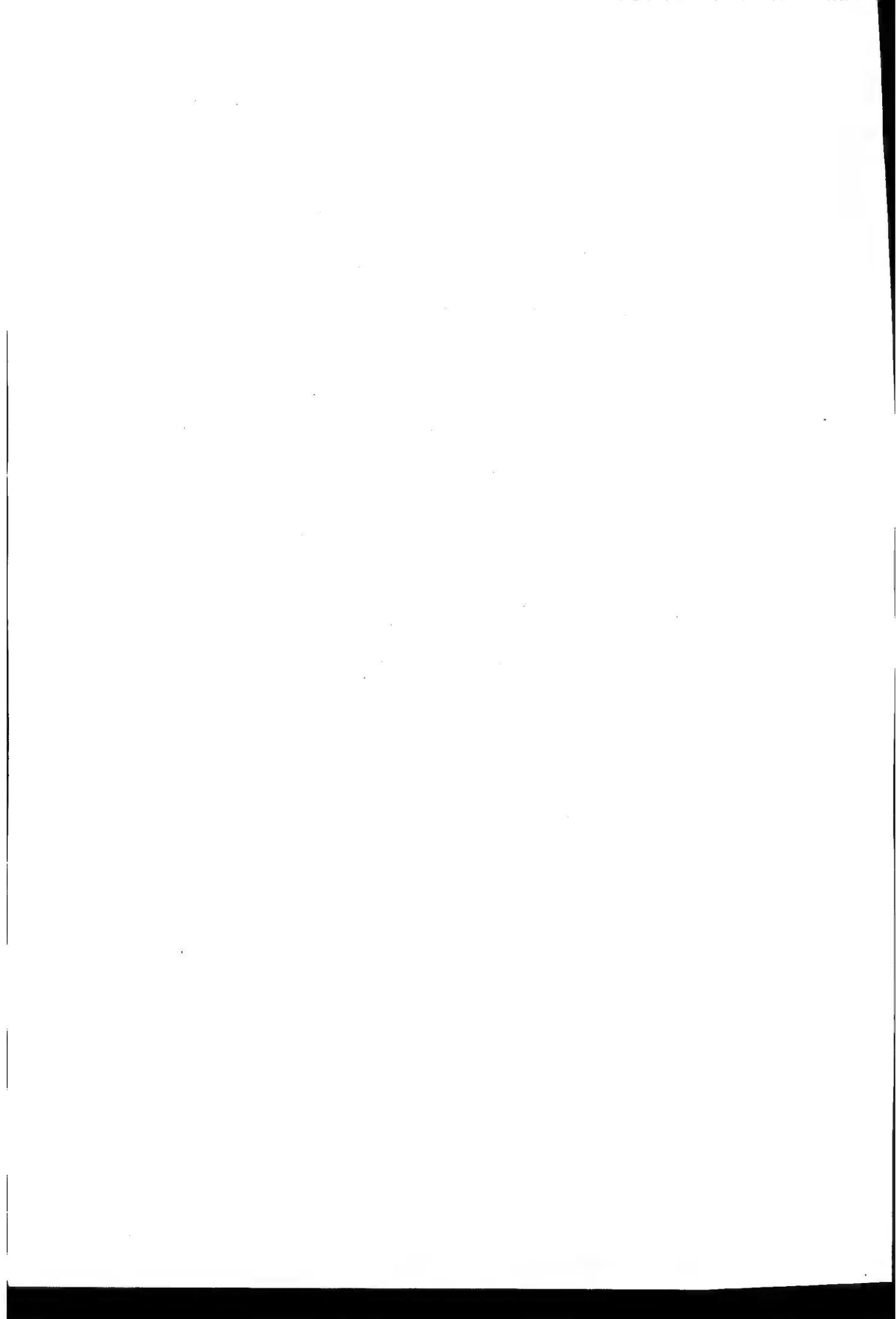
◆ تحديد العمل المبدئي

◆ اختبار أمثلية العمل المبدئي وتحسينه إن أمكن

### ■ نماذج التخصيص

◀ صياغة نماذج التخصيص

◀ حل نماذج التخصيص





## (٢ - ١) نماذج النقل

تهتم نماذج النقل بتوزيع مجموعة من الموارد أو السلع المتاحة من جهات متفرقة للإنتاج (متمثلة في المصانع أو المزارع أو الموانئ) أو للتخزين (متمثلة في مخازن فرعية) إلى بعض جهات الاستخدام (متمثلة في الأسواق أو منافذ للبيع).

ويتكون نموذج النقل من عدة عناصر هي :

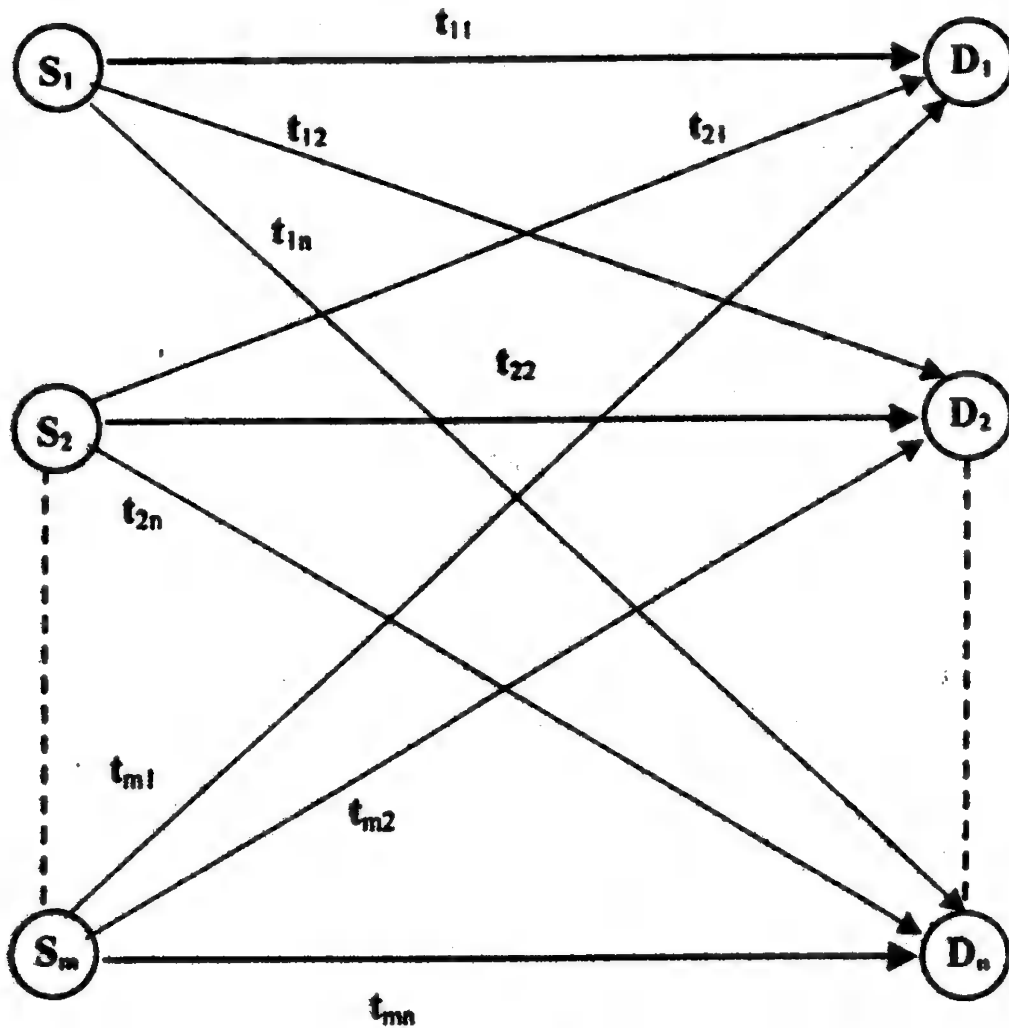
أ - جانب العرض : ويتمثل في عدد  $m$  من مصادر عرض السلعة والتي يتوافر لدى كل منها  $(i = 1, 2, \dots, m)$   $S_i$  من الكميات المتاحة من السلعة .

ب - جانب الطلب : ويتمثل في عدد  $n$  من جهات استخدام السلعة والتي يبلغ احتياج كل منها  $(j = 1, 2, \dots, n)$   $D_j$  من السلعة .

ج - جانب التكلفة : ويتمثل في المتغير  $t_{ij}$  ، حيث :

$(i = 1, 2, \dots, m ; j = 1, 2, \dots, n)$  والذي يشير إلى تكلفة نقل الوحدة من المصدر  $i$  إلى جهة الاستخدام  $j$  ويمكن أن يمثل هذا المتغير التكاليف المتغيرة للإنتاج أو للشراء أو للنقل أو بعضها أو كلها .

ويمكن تمثيل عناصر نموذج النقل بيانياً بالشكل التالي :



شكل (١-٣)

### (١-١-٣) صياغة نماذج النقل

تحدد العلاقة بين عناصر نموذج النقل على أساس أن الهدف هو تخصيص الوحدات المتاحة من السلعة من المصادر المختلفة إلى جهات الاستخدام المختلفة بطريقة تستنفذ المعروض من السلعة من

ناحية ، كما تستوفى احتياجات الطلب من ناحية أخرى ، على أن يتم ذلك بطريقة تضمن تحقيق الحد الأدنى من إجمالي تكاليف النقل .

ومن ثم فإن المتغيرات القرارية فى نموذج النقل تكون على

النحو التالى :

$x_{11}$  : تعنى الكمية التى ينبغى نقلها من المصدر 1 إلى جهة الاستخدام 1

$x_{12}$  : تعنى الكمية التى ينبغى نقلها من المصدر 1 إلى جهة الاستخدام 2

⋮

$x_{1n}$  : تعنى الكمية التى ينبغى نقلها من المصدر 1 إلى جهة الاستخدام n

بالمثل فإن :

$x_{21}$  : تعنى الكمية التى ينبغى نقلها من المصدر 2 إلى جهة الاستخدام 1

$x_{22}$  : تعنى الكمية التى ينبغى نقلها من المصدر 2 إلى جهة الاستخدام 2

⋮

$x_{2n}$  : تعنى الكمية التى ينبغى نقلها من المصدر 2 إلى جهة الاستخدام n

⋮

$x_{mn}$  : تعنى الكمية التى ينبغى نقلها من المصدر m إلى جهة الاستخدام n

وبصفة عامة فإن المتغيرات القرارية تأخذ الصورة :

$$x_{ij} , ( i = 1 , 2 , \dots , m ; j = 1 , 2 , \dots , n )$$

## النقل والتخصيص

وتعنى الكمية التى ينبغى نقلها من المصدر  $i$  إلى جهة الاستخدام  $j$ .

ويمكن تصوير عناصر نموذج النقل فى الجدول التالى :

الاستخدامات (إلى) المصادر (من)	1	2	3	.....	n	المعرض
1	$x_{11}$	$x_{12}$	$x_{13}$	.....	$x_{1n}$	$S_1$
2	$x_{21}$	$x_{22}$	$x_{23}$	.....	$x_{2n}$	$S_2$
⋮	⋮	⋮	⋮		⋮	⋮
m	$x_{m1}$	$x_{m2}$	$x_{m3}$	.....	$x_{mn}$	$S_m$
الطلب	$D_1$	$D_2$	$D_3$	.....	$D_n$	

ويكون الشكل النمطى لصياغة نموذج النقل كبرنامج خطى على

النحو التالى :

المطلوب إيجاد قيم  $(i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n)$  ،  $x_{ij}$

التي تحقق الحد الأدنى لدالة الهدف  $Z$  ، أى التي تحقق ما يلى :

$$\begin{aligned}
 \text{Min } Z = & t_{11} x_{11} + t_{12} x_{12} + \dots + t_{1n} x_{1n} \\
 & + t_{21} x_{21} + t_{22} x_{22} + \dots + t_{2n} x_{2n} \\
 & \vdots \\
 & + t_{m1} x_{m1} + t_{m2} x_{m2} + \dots + t_{mn} x_{mn}
 \end{aligned}$$

بشرط أن :

قيود العرض :

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + \dots + x_{1n} &\leq S_1 \\ x_{21} + x_{22} + \dots + x_{2n} &\leq S_2 \\ \vdots \\ x_{m1} + x_{m2} + \dots + x_{mn} &\leq S_m \end{aligned}$$

قيود الطلب :

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{21} + \dots + x_{m1} &\geq D_1 \\ x_{12} + x_{22} + \dots + x_{m2} &\geq D_2 \\ \vdots \\ x_{1n} + x_{2n} + \dots + x_{mn} &\geq D_n \end{aligned}$$

قيود عدم السالبة :  $x_{ij} \geq 0, (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n)$

ويمكن تلخيص صياغة نموذج النقل كما يلي :

المطلوب إيجاد  $x_{ij}, (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n)$

التي تجعل :

$$\text{Min } Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n t_{ij} x_{ij}$$

بشرط أن :

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq S_i, \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad \text{قيود العرض :}$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} \geq D_j, \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad \text{قيود الطلب :}$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n) \quad \text{قيود عدم السلبية :}$$

ويلاحظ أن قيود العرض تعنى أن جملة الكميات المعروضة من المصدر  $i$  إلى جميع جهات الاستخدام يجب ألا تتجاوز الكمية التى ينتجها (أو يشحنها) المصدر  $i$ ، بينما قيود الطلب تعنى أن جملة الكميات التى تنقل (أو تشحن) إلى جهة الاستخدام  $j$  من جميع مصادر العرض يجب ألا تقل عن احتياجات جهة الاستخدام  $j$ .

وتجدر الإشارة إلى أنه إذا تعذر نقل السلعة من مصدر  $i$  إلى جهة استخدام معينة  $j$  لأسباب طبيعية أو اقتصادية أو حتى سياسية، ففي هذه الحالة نفترض تكلفة نقل  $t_{ij}$  كبيرة جداً لنقل الوحدة من المصدر  $i$  إلى جهة الاستخدام  $j$ .

وفى التطبيقات العملية، لا يمكن أن يكون لنموذج النقل حل أساسى ممكن إذا لم يكن إجمالى العرض يساوى على الأقل إجمالى الطلب، أى أن :

$$\sum_{i=1}^m S_i \geq \sum_{j=1}^n D_j$$

وتبسط عادة أساليب الحل بفرض أن :

$$\sum_{i=1}^m S_i = \sum_{j=1}^n D_j$$

### النقل والتخصيص

وبناءً على ما سبق ذكره ، فإن نموذج النقل يأخذ الصورة القياسية التالية :

$$\text{Min } Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n t_{ij} x_{ij} \quad (1)$$

بشرط أن :

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = S_i , \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (2) \quad \text{قيود العرض:}$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = D_j , \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (3) \quad \text{قيود الطلب:}$$

$$x_{ij} \geq 0 , (i = 1, 2, \dots, m ; j = 1, 2, \dots, n) \quad (4) \quad \text{قيود عدم السلبية:}$$

من القيد (2) ، (3) نستنتج قيد ضمني خامس وهو :

$$\sum_{i=1}^m S_i = \sum_{j=1}^n D_j \quad (5)$$

وهذا القيد الضمني يشير إلى أنه يشترط لوجود حل أساسى ممكن لنموذج النقل أن يتوازن إجمالى العرض المتاح من السلعة لدى المصادر المختلفة مع إجمالى الطلب على السلعة لدى جهات الاستخدام المختلفة .

وفى الواقع العملى فإن هذا الشرط قد لا يتحقق فى أغلب الأحوال إذ قد تزيد الكميات المعروضة من السلعة عن الكميات المطلوبة منها ، ويكون هناك بالتالى فائض فى العرض ، وفى هذه الحالة نفترض

وجود جهة استخدام وهمية ( أى سوق وهمى ) يعادل الطلب فيها العرض الفائض ، أو قد يحدث العكس ، وتقل الكميات المعروضة لدى المصادر المختلفة عن الكميات المطلوبة لدى جهات الاستخدام المختلفة، ويكون هناك عجز ، وفى هذه الحالة يفترض وجود مصدر (أى مصنع) وهمى يعادل العرض فيه الطلب الزائد .

ويمثل الطلب الوهمى المتغير المتم لتحويل متباينة العرض إلى معادلة ، بينما يمثل العرض الوهمى المتغير المتم لتحويل متباينة الطلب إلى معادلة .

### مثال (١) :

تدير الهيئة العامة لصناعة الأسمنت أربعة مصانع بالسويس وطره وحلوان وأسيوط تبلغ طاقتها الإنتاجية السنوية القصوى ( بآلاف الأطنان) 500 , 600 , 400 , 800 على الترتيب .

وترغب الهيئة فى تسليم الأسمنت إلى مناطق التوزيع الإقليمية بالقاهرة والإسكندرية وطنطا وأسوان ، وتبلغ الاحتياجات الفعلية السنوية لهذه المناطق ( بآلاف الأطنان) : 900 , 300 , 700 , 800 على الترتيب .

وقد كانت تكلفة نقل الوحدة ( بآلاف طن ) من جهات الإنتاج إلى مراكز التوزيع الرئيسية ( بآلاف جنيه ) كما يلى :



### النقل والتلصيص

الاستخدامات (إلى) المصادر (من)	أسوان	طنطا	الإسكندرية	القاهرة
السويس	65	35	40	30
طره	62	27	32	15
حلوان	60	30	35	13
أسيوط	20	53	58	50

المطلوب : صياغة النموذج في صورة برنامج خطى .

الحل :

حيث أن إجمالي الكميات المعروضة من المصانع هي :

$$500 + 600 + 400 + 800 = 2300 \text{ (ألف طن)}$$

إجمالي الكميات المطلوبة لمراكز التوزيع هي :

$$900 + 300 + 700 + 800 = 2700 \text{ (ألف طن)}$$

ويلاحظ أن إجمالي الكميات المطلوبة لمراكز التوزيع تزيد عن

الكميات المعروضة من المصانع ، لذلك ينبغي إضافة مصنع وهمي

(والذي يمثل استيراد) بطاقة إنتاجية هي :

$$2700 - 2300 = 400 \text{ (ألف طن)}$$

وبتكلفة نقل إلى جميع مراكز التوزيع تساوى أصفار ، ويصبح جدول

المعاملات الفنية لنموذج النقل كما يلي :

## النقل والتخصيص

الاستخدامات (إلى) المصادر (من)	القاهرة	الإسكندرية	طنطا	أسوان	إجمالي
السويس	30	40	35	65	500
طره	15	32	27	62	600
حلوان	13	35	30	60	400
أسيوط	50	58	53	20	800
مصنع وهمي	0	0	0	0	400
إجمالي الطلب	900	300	700	800	

نفترض أن  $x_{ij}$  ,  $(i = 1, 2, 3, 4, 5 ; j = 1, 2, 3, 4)$  تشير إلى كمية الأسمنت (بالألف طن) التي ينبغي نقلها من المصدر  $i$  إلى مركز التوزيع  $j$  ، ويكون المطلوب هو إيجاد قيم  $x_{ij}$  التي تحقق ما يلي :

$$\begin{aligned}
 \text{Min } Z = & 30 x_{11} + 40 x_{12} + 35 x_{13} + 65 x_{14} \\
 & + 15 x_{21} + 32 x_{22} + 27 x_{23} + 62 x_{24} \\
 & + 13 x_{31} + 35 x_{32} + 30 x_{33} + 60 x_{34} \\
 & + 50 x_{41} + 58 x_{42} + 53 x_{43} + 20 x_{44} \\
 & + (0) x_{51} + (0) x_{52} + (0) x_{53} + (0) x_{54}
 \end{aligned}$$

بشرط أن :

قيود العرض :

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 500$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 600$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 400$$

$$x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} = 800$$

$$x_{51} + x_{52} + x_{53} + x_{54} = 400$$

قيود الطلب :

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} = 900$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} + x_{52} = 300$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} + x_{53} = 700$$

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} + x_{54} = 800$$

قيود عدم السلبية :

$$x_{ij} \geq 0 , \quad (i = 1, 2, \dots, 5 ; j = 1, 2, \dots, 4)$$

مثال (٢) :

بفرض أن هناك ثلاثة مناجم لإنتاج الفحم تقوم بتوزيع إنتاجها على أربعة مراكز توزيع رئيسية هي : A , B , C , D . فإذا كانت الطاقة الإنتاجية القصوى للمناجم (بالألف طن) سنوياً هي على الترتيب : 400 , 500 , 800 وكانت القدرة الاستيعابية السنوية

## النقل والتوزيع

لمراكز التوزيع الرئيسية ( بالآف طن ) هي على الترتيب : 150 , 400 , 350 , 600 علماً بأن تكلفة إنتاج الطن يختلف باختلاف المنجم، وكذلك فإن سعر بيع الطن يختلف باختلاف مركز التوزيع .

وفيما يلي بيان بتكلفة إنتاج الطن بكل منجم وسعر بيع الطن بكل مركز توزيع ، وكذا تكلفة نقل الطن إلى كل مركز توزيع بالجنبيه :

مركز التوزيع المنجم	A	B	C	D	تكلفة إنتاج الطن
الأول	9	7	10	12	150
الثاني	6	10	8	9	130
الثالث	15	9	11	10	160
سعر بيع الطن	200	230	220	190	

المطلوب : صياغة النموذج في صورة برنامج خطى .

الحل :

إجمالى الكميات المعروضة من المناجم هي :

$$400 + 500 + 800 = 1700 \quad (\text{آف طن})$$

إجمالى الكميات المطلوبة في مراكز التوزيع هي :

$$150 + 600 + 350 + 400 = 1500 \quad (\text{آف طن})$$

## النقل والتوزيع

وحيث أن إجمالي الكميات المعروضة أكبر من إجمالي الكميات المطلوبة لذلك يضاف مركز توزيع وهمي (الذي يمثل تصدير) بطاقة استيعابية هي :

$$1700 - 1500 = 200 \text{ (ألف طن)}$$

لذلك فإن جدول المعاملات الفنية لنموذج النقل يأخذ الصورة التالية :

إجمالي الطلب	ت. إنتاج الطن	E (وهي)	D	C	B	A	مركز التوزيع (إلى) المنجم (من)
400	150	0	12	10	7	9	الأول
500	130	0	9	8	10	6	الثاني
800	160	0	10	11	9	15	الثالث
		0	190	220	230	200	سعر بيع للطن
		200	400	350	600	150	إجمالي العرض

نفرض أن  $x_{ij}$  تشير إلى كمية الفحم التي ينبغي شحنها سنوياً من المنجم  $i$  إلى مركز التوزيع  $j$  ويصاغ النموذج على النحو التالي :

$$\begin{aligned} \text{Max } Z = & [ 200 (x_{11} + x_{21} + x_{31}) + 230 (x_{12} + x_{22} + x_{32}) \\ & + 220 (x_{13} + x_{23} + x_{33}) + 190 (x_{14} + x_{24} + x_{34}) \\ & - [ 150 (x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14}) + 130 (x_{21} + x_{22} \\ & + x_{23} + x_{24}) + 160 (x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34}) \end{aligned}$$

## النقل والتخصيص

$$\begin{aligned}
 & - [ 9 x_{11} + 7 x_{12} + 10 x_{13} + 12 x_{14} + 6 x_{21} \\
 & + 10 x_{22} + 8 x_{23} + 9 x_{24} + 15 x_{31} + 9 x_{32} \\
 & + 11 x_{33} + 10 x_{34} ]
 \end{aligned}$$

بشرط أن :

قيود العرض :

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 400$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 500$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} = 800$$

قيود الطلب :

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 150$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 600$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 350$$

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 400$$

$$x_{15} + x_{25} + x_{35} = 200$$

قيود عدم السلبية :

$$x_{ij} \geq 0 , \quad ( i = 1, 2, 3 ; j = 1, 2, \dots, 5 ).$$

يمكن اختصار دالة الهدف على النحو التالي :

$$\begin{aligned}
 \text{Max } Z = & 41 x_{11} + 64 x_{21} + 25 x_{31} + 73 x_{12} + 90 x_{22} + \\
 & 61 x_{32} + 60 x_{13} + 82 x_{23} + 49 x_{33} + 28 x_{14} + \\
 & 51 x_{24} + 20 x_{34} .
 \end{aligned}$$

ملحوظة : يلاحظ أن المتغيرات القرارية  $x_{ij}$  الخاصة بعمود مركز التوزيع الوهمي ( أو الخاصة بالمصدر الوهمي ) لا تظهر بدالة الهدف  $Z$  ، لأن معاملات تلك المتغيرات بدالة الهدف والتي تتمثل في عناصر العائد أو التكلفة المرتبطة بها - سوف تكون أصفار ، ولكن هذه المتغيرات سوف تظهر فقط في كل من قيود العرض وقيود الطلب وقيود عدم السلبية .

### ( ٢-١-٣ ) حل نماذج النقل

بالرغم من أن نماذج النقل يمكن صياغتها كنموذج برمجة خطية إلا أنه يمكن الاستفادة من الخصائص المحددة والمبسطة لهذه النماذج في تبسيط إجراءات الحل لها ، وتتلخص عملية حل نموذج النقل في خطوتين رئيسيتين هما :

الخطوة الأولى : تحديد الحل المبدئي للنموذج .

الخطوة الثانية : اختبار أمثلية الحل المبدئي وتحسينه إن أمكن .

وسوف نتناول بالتفصيل هاتين الخطوتين .

#### أولاً : تحديد الحل المبدئي

تهدف هذه الخطوة إلى تحديد الحل المبدئي لنموذج النقل والذي ينبغي أن يكون حلاً أساسياً وممكناً في نفس الوقت بالإضافة إلى استيفائه لقيود العرض وقيود الطلب المختلفة ، ولتحقيق هذا الهدف يوجد عدة طرق مختلفة تتدرج في كفاءتها نذكر منها :

أ - طريقة الركن الشمالى الغربى .

ب - طريقة أدنى تكلفة .

ج - طريقة فوجل التقريبية .

وسوف نتناول كل طريقة من هذه الطرق بالتفصيل .

أ - طريقة الركن الشمالى الغربى

#### Northwest – Corner Method

نتلخص هذه الطريقة لتحديد الحل المبدئى لنموذج النقل فى الخطوات

التالية :

١ - نبدأ بالخلية التى تقع فى شمال غرب مصفوفة النقل وهى الخلية

( 1 , 1 ) ، ولتحديد الكمية التى توضع فى هذه الخلية تتم المقارنة

بين الكمية المعروضة من المصدر 1 ( أى الكمية  $S_1$  )

والكمية المطلوبة فى جهة الاستخدام 1 ( أى الكمية  $D_1$  ) ،

فإذا كانت  $D_1 < S_1$  والذى يعنى أن الكمية المطلوبة فى

جهة الاستخدام الأولى تقل عن الكمية المتاحة للمصدر الأول

فيتم شغل الخلية ( 1 , 1 ) بمقدار  $D_1$  ويرمز لهذه الكمية بالرمز

$x_{11}$  ويعنى ذلك استيفاء قيد العمود الأول وبالتالى يجب حذفه من

مصفوفة النقل ، أما الكمية المعروضة من المصدر 1 فى الصف

الأول من المصفوفة فيتم تخفيضها بالكمية  $x_{11}$  ، ثم نتحرك أفقياً

إلى الخلية ( 1 , 2 ) فى الخطوة التالية .



وإذا كانت  $S_1 < D_1$  والذي يعنى أن الكمية المعروضة فى المصدر الأول نقل عن الكمية المطلوبة فى جهة الاستخدام الأولى فيتم شغل الخلية  $(1, 1)$  بمقدار  $S_1$  والتي يرمز لها - كما بينا - بالرمز  $x_{11}$  ، ويعنى ذلك استيفاء قيد الصف الأول وبالتالي يجب حذفه من مصفوفة النقل ، أما الكمية المطلوبة فى جهة الاستخدام 1 الواقعة فى العمود الأول من المصفوفة فيتم تخفيضها بالكمية  $x_{11}$  ، ثم نتحرك رأسياً إلى الخلية  $(1, 2)$  فى الخطوة التالية .

أما إذا كانت  $S_1 = D_1$  والذي يعنى أن الكمية المعروضة من المصدر الأول تساوى الكمية المطلوبة فى جهة الاستخدام الأولى فيتم شغل الخلية  $(1, 1)$  بأى من المقدارين المتساويين والذي يرمز له بالرمز  $x_{11}$  ويعنى ذلك استيفاء قيد الصف الأول وقيد العمود الأول من مصفوفة النقل فى نفس الوقت ، ومن ثم يتم حذف كلاً من الصف الأول والعمود الأول . ثم نتحرك قطرياً إلى الخلية  $(2, 2)$  فى الخطوة الثانية ، ومن ثم فإننا نلاحظ دائماً أن :

$$x_{11} = \min (S_1, D_1)$$

٢ - يتم الاستمرار فى هذه الخطوات بالانتقال التدريجى من خلال الخلايا الواقعة فى الشمال الغربى نحو الخلايا الواقعة فى الجنوب الشرقى من مصفوفة المعاملات الفنية لنموذج النقل حتى

### النقل والتلخيص

يتم الانتهاء من توزيع (أو نقل) كل الكميات المعروضة من المصادر المختلفة وفقاً لاحتياجات الطلب في جهات الاستخدام المختلفة .

#### مثال (٣) :

بفرض أن شركة لديها 3 مصانع لإنتاج السكر هي A , B , C وتبلغ طاقتها الإنتاجية الشهرية القصوى (بالطن) : 300 , 500 , 600 على الترتيب .

وتقوم الشركة بتوزيع إنتاجها من السكر إلى 4 جهات استهلاك رئيسية هي : 1 , 2 , 3 , 4 ، وتبلغ احتياجاتها الفعلية للشهرية (بالطن) : 250 , 400 , 350 , 400 على الترتيب .

وكانت تكلفة نقل الطن من السكر (بالجنيه) من جهات الإنتاج إلى مراكز الاستهلاك الرئيسية كما يلي :

جهة الاستهلاك \ المصنع	1	2	3	4
A	7	5	10	8
B	3	6	12	4
C	4	7	9	15

المطلوب : إيجاد الحل المبدئي لنموذج النقل مستخدماً طريقة الركن الشمالي الغربي .

الحل :

إجمالي الكميات المعروضة من المصانع هي :

$$\sum_{i=1}^3 S_i = 600 + 500 + 300 = 1400 \text{ (طن)}$$

إجمالي الكميات المطلوبة لدى جهات الاستهلاك هي :

$$\sum_{j=1}^4 D_j = 400 + 350 + 400 + 250 = 1400 \text{ (طن)}$$

وحيث أن إجمالي الكميات المعروضة يتساوى مع إجمالي الكميات المطلوبة فلسنا في حاجة إذن لإضافة مصنع وهمي أو سوق وهمي .

وتبدأ خطوات الحل بشغل الخلية (1, 1) وذلك بالمقارنة بين

$S_1, D_1$  واختيار أيهما أقل لشغل الخلية بالكمية  $x_{11}$  ، حيث :

$$x_{11} = \min (S_1, D_1) = \min (600, 400) = 400$$

وبالتالي نشغل الخلية (1, 1) بالكمية 400 ، ثم نحذف العمود الأول الذي تم استيفاءه بالكامل ، وفي نفس الوقت نخفض الكمية المعروضة بالصف الأول بمقدار 400 وحدة ليصبح إجمالي المعروض بالصف الأول بالمصفوفة هو 200 وحدة .

ثم ننقل إلى الخلية (1, 2) والتي سوف يتم شغلها بالكمية  $x_{12}$

حيث :

$$x_{12} = \min (S_1, D_2) = \min (200, 350) = 200,$$

ونحذف الصف الأول الذى تم استيفاءه بالكامل ونخفض الكمية المطلوبة فى العمود الثانى بمقدار 200 وحدة ، ليصبح إجمالى الكمية المطلوبة فى العمود الثانى هو 150 وحدة .

ثم يتم الانتقال إلى الخلية (2, 2) وتشغل بالكمية  $x_{22}$  ، حيث :

$$x_{22} = \min (S_2, D_2) = \min (500, 150) = 150.$$

ونحذف العمود الثانى الذى تم استيفاءه ونخفض الكمية المعروضة فى الصف الثانى بمقدار 150 وحدة ليصبح إجمالى العرض المتبقى 350 وحدة .

ثم ننقل إلى الخلية (2, 3) ويتم شغلها بالكمية  $x_{23}$  ، حيث :

$$x_{23} = \min (S_2, D_3) = \min (350, 400) = 350$$

ثم نحذف الصف الثانى الذى تم استيفاءه بالكامل ونخفض الكمية المطلوبة فى العمود الثالث بمقدار 350 وحدة ليصبح إجمالى الطلب المتبقى فى هذا العمود 50 وحدة .

يتم شغل الخلايا المتبقية فى الصف الثالث والأخير بطريقة المتمم الحسابى كما يلى :

$$x_{33} = 50 \quad , \quad x_{34} = 250$$

ويكون جدل الحل على النحو التالى :

## النقل والتلصيص

جهة الاستهلاك المصنع	1	2	3	4	إجمالي العرض
A	7 400	5 200	10	8	600
B	3	6 150	12 350	4	500
C	4	7	9 50	15 250	300
إجمالي الطلب	400	350	400	250	

ونكون بذلك قد انتهينا من تحديد الحل المبدئي لنموذج النقل وفقاً لطريقة الركن الشمالي الغربي ، ووفقاً لهذه الطريقة فإن إجمالي تكاليف النقل تتحدد وفقاً لقيمة دالة الهدف كما يلي :

$$Z = 7(400) + 5(200) + 6(150) + 12(350) + 9(50) + 15(250) = 13100 \text{ (جنيه)}$$

### ب - طريقة أصغر تكلفة Least - Cost Method

بالرغم من سهولة استخدام الطريقة السابقة في إيجاد الحل المبدئي إلا أنه يعاب عليها أنها لا تأخذ في الاعتبار عامل التكلفة وهو الأهم ، لذلك فإن طريقة أصغر تكلفة تعتمد على اختيار التكلفة ذات التكلفة الأقل في كل صف أو في كل عمود أو في المصفوفة كلها .

### ١ - طريقة أصغر تكلفة بكل صف

تبدأ هذه الطريقة باختيار الخلية التي لها أصغر تكلفة نقل في الصف الأول ويتم شغل هذه الخلية بنفس الأسلوب السابق ، ويستمر ذلك إلى أن يتم حذف الصف الأول من مصفوفة النقل ، ثم ننقل إلى الصف الثاني ونختار الخلية التي لها أصغر تكلفة نقل ويتم شغلها ، ويستمر ذلك إلى أن يتم حذف الصف الثاني من مصفوفة النقل ، وهكذا حتى يتم الانتهاء من جميع صفوف مصفوفة النقل .

### مثال (٤) :

اعتبر مصفوفة النقل الواردة في مثال (٣) وحدد الحل المبدئي لنموذج النقل باستخدام طريقة أصغر تكلفة بكل صف .  
الحل :

جهة الاستهلاك المصنع	1	2	3	4	إجمالي العرض
A	7 250	5 350	10	8	600
B	3 150	6	12 100	4 250	500
C	4	7	9 300	15	300
إجمالي الطلب	400	350	400	250	

### النقل والتوزيع

نبدأ بالصف الأول ونختار الخلية التي لها أقل تكلفة نقل وهي الخلية (1, 2) ويتم شغلها بالكمية  $x_{12}$  ، حيث :

$$x_{12} = \min (S_1, D_2) = \min (600, 350) = 350 \text{ (وحدة)}$$

ثم يتم حذف العمود الثاني الذي تم استيفاءه بالكامل ويخفض إجمالي العرض بالصف الأول بمقدار 350 ليصبح 250 وحدة .

ثم ننقل إلى الخلية التي لها أصغر تكلفة تالية في الصف الأول وهي الخلية (1, 1) ويتم شغلها بالكمية  $x_{11}$  ، حيث :

$$x_{11} = \min (S_1, D_1) = \min (250, 400) = 250 \text{ (وحدة)}$$

ويحذف الصف الأول نظراً لاستيفائه بالكامل وتخفض الكمية المطلوبة في العمود الأول بمقدار 250 لتصبح : (وحدة)  $150 = (400 - 250)$  .

وبعد حذف الصف الأول يتم الانتقال إلى الصف الثاني وتختار الخلية التي لها أقل تكلفة وهي الخلية (2, 1) ويتم شغلها بالكمية  $x_{21}$  ، حيث :

$$x_{21} = \min (S_2, D_1) = \min (500, 150) = 150 \text{ (وحدة)}$$

ويحذف العمود الأول الذي تم استيفاءه بالكامل ويخفض إجمالي العرض بالصف الثاني ليصبح :

$$(500 - 150) = 350 \text{ (وحدة)}$$

يتم الانتقال بعد ذلك إلى الخلية التي لها أدنى تكلفة تالية بالصف الثاني وهي الخلية (2, 4) ويتم شغلها بالكمية  $x_{24}$  ، حيث :

$$x_{24} = \min (S_2, D_4) = \min (350, 250) = 250 \text{ (وحدة)}$$

ويحذف العمود الرابع نظراً لإستيفائه بالكامل ويخفض إجمالى العرض من الصف الثانى ليصبح :

$$( 350 - 250 ) = 100 \text{ (وحدة)}$$

وحيث أنه تم حذف 3 أعمدة ولم يتبق سوى عمود واحد بمصفوفة النقل وهو العمود الثالث ، لذلك يتم شغل خلاياه بطريقة المتمم الحسابى كما يلى :

$$x_{23} = 100 , \quad x_{33} = 300$$

وتكون قيمة دالة الهدف وفقاً لهذه الطريقة هى :

$$Z = 7 ( 250 ) + 5 ( 350 ) + 3 ( 150 ) + 12 ( 100 ) + 4 ( 250 ) + 9 ( 300 ) = 8850 \text{ (جنيهاً)}$$

وكما هو واضح فإن قيمة دالة الهدف وفقاً لهذه الطريقة تقل عنها فى طريقة الركن الشمالى الغربى لأنها تأخذ عنصر التكلفة فى الاعتبار عند اختيار الخلايا التى سوف يتم شغلها .

## ٢ - طريقة أصغر تكلفة بكل عمود

تختلف هذه الطريقة عن الطريقة السابقة حيث تبدأ باختيار الخلية التى لها أصغر تكلفة فى العمود الأول ويتم شغل هذه الخلية بنفس الأسلوب السابق وبعد الانتهاء من العمود الأول وحذفه ننقل إلى العمود الثانى فالثالث وهكذا حتى يتم الانتهاء من المصفوفة كلها .



### مثال (٥):

أعتبر مصفوفة النقل الواردة في مثال (٣) ، وحدد الحل المبدئي لنموذج النقل باستخدام طريقة أصغر تكلفة بكل عمود .

الحل :

مصفوفة النقل الواردة في مثال (٣) هي :

وجه الاستخدام المصنع	1	2	3	4	إجمالي العرض
A	7 350	5 100	10 150	8 150	600
B	3 400	6 100	12 100	4 100	500
C	4 300	7 300	9 300	15 300	300
إجمالي الطلب	400	350	400	250	

نبدأ بالعمود الأول ونختار الخلية التي لها أقل تكلفة نقل وهي

الخلية (١, ٢) ويتم شغلها بالكمية  $x_{21}$  ، حيث :

$$x_{21} = \min (S_2, D_1) = \min (500, 400) = 400 \text{ (وحدة)}$$

ويتم حذف للعمود الأول نظراً لإستيفائه بالكامل ويخفض إجمالي للمعروض بالصف الثاني بالكمية 400 ليصبح 100 وحدة .

يتم الانتقال بعد ذلك إلى العمود الثانى وتختار الخلية التى لها أقل تكلفة نقل وهى الخلية (1, 2) ويتم شغلها بالكمية  $x_{12}$  ، حيث :

$$x_{12} = \min (S_1, D_2) = \min (600, 350) = 350 \text{ (وحدة)}$$

ويحذف العمود الثانى نظراً لإستيفائه بالكامل ويخفض إجمالى العرض بالصف الأول بالكمية 350 ليصبح 250 وحدة .

ثم تنتقل إلى العمود الثالث وتختار الخلية التى لها أصغر تكلفة وهى الخلية (3, 3) ويتم شغلها بالكمية  $x_{33}$  ، حيث :

$$x_{33} = \min (S_3, D_3) = \min (300, 400) = 300 \text{ (وحدة)}$$

ويتم حذف الصف الثالث نظراً لإستيفائه بالكامل وتخفض إجمالى الكمية المطلوبة فى العمود الثالث بمقدار 300 ليصبح 100 وحدة .

ثم تنتقل إلى الخلية التى لها أصغر تكلفة تالية بالعمود الثالث وهى الخلية (1, 3) ويتم شغلها بالكمية  $x_{13}$  ، حيث :

$$x_{13} = \min (S_1, D_3) = \min (250, 100) = 100 \text{ (وحدة)}$$

ويحذف العمود الثالث نظراً لإستيفائه بالكامل ثم يخفض إجمالى المعروض بالصف الأول بمقدار 100 ليصبح 150 وحدة .

ونظراً لحذف جميع الأعمدة بمصفوفة النقل عدا العمود الرابع ف يتم شغل خلاياه بطريقة المتم الحسابى ، حيث يلاحظ أن :

$$x_{14} = 150 \text{ (وحدة)} , \quad x_{24} = 100 \text{ (وحدة)}$$

وتكون قيمة دالة الهدف هى :

$$Z = 5(350) + 10(100) + 8(150) + 3(400) +$$

### النقل والتخصيص

$$4(100) + 9(300) = 8250 \text{ (جنيها)}$$

وهي بالتأكيد سوف تقل أيضا عن قيمتها في طريقة الركن الشمالى الغربى للمسبب نفسه .

### ٣ - طريقة أصغر تكلفة بالمصفوفة عموماً

تبدأ هذه الطريقة باختيار الخلية التى لها أصغر تكلفة بالمصفوفة ككل ويتم شغلها بنفس الأسلوب السابق ، ثم ننقل بعد ذلك إلى الخلية التى لها أصغر تكلفة تالية بالمصفوفة ككل ويتم شغلها وهكذا حتى يتم الانتهاء من المصفوفة ككل .

### مثال (٦) :

أعتبر مصفوفة النقل الواردة في مثال (٣) ، وحدد الحل المبدئى لنموذج النقل باستخدام طريقة أصغر تكلفة بالمصفوفة عموماً .

**الحل :**

إجمالي العرض	4	3	2	1	جهة الاستخدام المصنع
600	8 150	10 100	5 350	7	A
500	4 100	12	6	3 400	B
300	15	9 300	7	4	C
	250	400	350	400	إجمالي الطلب

نبدأ باختيار الخلية التي لها أصغر تكلفة بالمصفوفة ككل وهي الخلية (2, 1) ويتم شغلها بالكمية  $x_{21}$  ، حيث :

$$x_{21} = \min (S_2, D_1) = \min (500, 400) = 400 \text{ (وحدة)}$$

ويحذف العمود الأول نظراً لإستيفائه بالكامل وفي نفس الوقت يخفض إجمالي العرض بالصف الثاني بمقدار 400 ليصبح 100 وحدة .

بعد ذلك ننتقل إلى الخلية التي لها أصغر تكلفة تالية بالمصفوفة ككل وهي الخلية (2, 4) ويتم شغلها بالكمية  $x_{24}$  ، حيث :

$$x_{24} = \min (S_2, D_4) = \min (100, 250) = 100 \text{ (وحدة)}$$

ويحذف الصف الثاني نظراً لإستيفائه بالكامل ويخفض - في نفس الوقت - إجمالي الطلب بالعمود الرابع بمقدار 100 ليصبح :

$$250 - 100 = 150 \text{ (وحدة)}$$

ثم ننتقل إلى الخلية ذات التكلفة الأقل بالمصفوفة ككل وهي الخلية (1, 2) ويتم شغلها بالكمية  $x_{12}$  ، حيث :

$$x_{12} = \min (S_1, D_2) = \min (600, 350) = 350 \text{ (وحدة)}$$

ويحذف العمود الثاني نظراً لإستيفائه بالكامل ويخفض - في نفس الوقت - إجمالي العرض بالصف الأول بمقدار 350 ليصبح :

$$600 - 350 = 250 \text{ (وحدة)}$$

ثم ننتقل إلى الخلية ذات التكلفة الأقل وهي الخلية (1, 4) ويتم شغلها بالكمية  $x_{14}$  ، حيث :

$$x_{14} = \min (S_1, D_4) = \min (250, 150) = 150 \text{ (وحدة)}$$

ويحذف العمود الرابع نظراً لإستيفائه بالكامل ويخفض إجمالي العرض بالصف الأول بمقدار 150 ليصبح :

$$(250 - 150) = 100 \text{ (وحدة)}$$

وحيث أنه تم حذف جميع الأعمدة بالمصفوفة ما عدا العمود الثالث لذلك يتم شغل خلاياه بطريقة المتمم الحسابي حيث يلاحظ أن :

$$x_{13} = 100 \text{ (وحدة)} , x_{33} = 300 \text{ (وحدة)}$$

وتكون قيمة دالة الهدف في هذه الحالة كما يلي :

$$Z = 5 (350) + 10 (100) + 8 (150) + 3 (400) + 4 (100) + 9 (300) = 8250 \text{ (جنيهاً)}$$

وكما هو واضح فإن طريقة أقل تكلفة ، سواء بكل صف أو بكل عمود أو بالمصفوفة عموماً ، سوف تقود حتماً على حل مبدئي قيمة دالة الهدف فيه أقل من قيمة دالة الهدف للحل المبدئي الذي يتم الحصول عليه بطريقة الركن الشمالى الغربى نظراً لأنها تأخذ عنصر التكلفة فى الاعتبار عند اختيار الخلية المرشحة لأن يتم شغلها .

**ج- طريقة فوجل التقريبية Vogel's Approximation Method**

تتلخص طريقة فوجل لإيجاد الحل المبدئي لنموذج النقل فى

الخطوات التالية :

١ - بحسب الفرق المطلق بين أصغر تكلفة والتكلفة التالية لها مباشرة وذلك لكل صف وأيضاً لكل عمود ويكتب هذا الفرق فى نهاية كل صف وكل عمود ويرمز لهذا الفرق بالرمز  $d_1$  ، هذا الفرق فى التكلفة يمثل تكلفة الجزاء أو العقاب على عدم اختيار الخلية ذات التكلفة الأقل .

٢ - يتم أخذ أكبر فرق مطلق للتكلفة ويحدد الصف أو العمود الذى ينتمى إليه أكبر فرق مطلق فى التكلفة ثم تختار الخلية ذات التكلفة الأقل بهذا الصف أو ذلك العمود ويتم شغلها ، وفى حالة تعادل أكثر من صف و / أو ( and / or ) عمود فى قيمة أكبر فرق مطلق للتكلفة نختار أياً عشوائياً ثم نختار الخلية ذات الأدنى تكلفة بهذا الصف و / أو العمود ويتم شغلها .

٣ - يتم شغل الخلية التى تم اختيارها بنفس الطريقة السابقة على أساس الأصغر من الكميات المتاحة فى مصدر العرض والكميات المطلوبة فى جهة الاستخدام ، ثم نحذف الصف أو العمود الذى تم استيفاءه بالكامل ونخفض الكمية المطلوبة فى جهة الاستخدام أو الكمية المعروضة فى مصدر العرض بتلك الكمية الأصغر لنحصل على الجزء المتبقى .

٤ - نعيد حساب الفرق المطلق بين أصغر تكلفة والتكلفة التالية لها مباشرة لكل صف ولكل عمود ويرمز لهذا الفرق بالرمز  $d_2$  ، للبدء فى جولة جديدة من الخطوات السابقة ، وفى هذه الخطوة

يمكن الاقتصار فقط على كتابة الفروق الجديدة دونما الحاجة إلى إعادة كتابة الفروق التي تظل بدون تعديل في الخطوة السابقة .

٥ - تستمر جولات الحل حتى يتم الانتهاء من توزيع كل الكميات المعروضة من المصادر المختلفة وفقاً لاحتياجات الطالب في جهات الاستخدام المختلفة .

### **مثال (٧) :**

أعتبر مصفوفة النقل الواردة في مثال (٣) ، وحدد الحل المبدئي لنموذج النقل باستخدام طريقة فوجل التقريبية .

**الحل :**

نعيد كتابة مصفوفة النقل كما يلي :

# النقل والتخصيص

وجه الاستخدام \ المصنع	1	2	3	4	إجمالي العرض
A	7 400	5 350	10 250	8 600	600
B	3 250	6 250	12 500	4 250	500
C	4 150	7 350	9 400	15 300	300
إجمالي الطلب	400	350	400	250	

$d_1$  :  
 $d_2$  :  
 $d_3$  :  
 $d_4$  :

1  
 1  
 3  
 1  
 1  
 1

4

$d_1$  2  
 $d_2$  2  
 $d_3$  2  
 $d_4$  5  
 3  
 3  
 3  
 3

3

5



### الجدولة الأولى :

١ - تحسب الفروق المطلقة ،  $d_1$  ، بين أصغر تكلفة والتكلفة التالية لها مباشرة لكل صف ولكل عمود ، حيث يلاحظ أن :

الصفوف	الأعمدة
--------	---------

للعمود الأول : $d_1 = 4 - 3 = 1$	للصف الأول : $d_1 = 7 - 5 = 2$
للعمود الثاني : $= 6 - 5 = 1$	للصف الثاني : $= 4 - 3 = 1$
للعمود الثالث : $= 10 - 9 = 1$	للصف الثالث : $= 7 - 4 = 3$
للعمود الرابع : $= 8 - 4 = 4$	

٢ - حيث أن أكبر فرق مطلق للتكلفة هو 4 وهو ينتمي للعمود الرابع ، لذلك يتم اختيار الخلية ذات الأقل تكلفة بالعمود الرابع وهي الخلية (2, 4) ويتم شغلها بالكمية  $x_{24}$  ، حيث :

$x_{24} = \min (S_2, D_4) = \min (500, 250) = 250$  (وحدة)

ويحذف العمود الرابع نظرا لإستيفائه بالكامل وتخفيض الكمية المعروضة بالمصنع الثاني لتصبح :

$$(500 - 250) = 250 \text{ (وحدة)}$$

### الجدولة الثانية :

١ - تحسب الفروق المطلقة ،  $d_2$  ، بين أدنى تكلفة والتكلفة التي تليها مباشرة لكل صف ولكل عمود ، حيث يلاحظ أن :

الأعمدة	الصفوف
للعمود الأول : $d_2 = 4 - 3 = 1$	للصف الأول : $d_2 = 7 - 5 = 2$
للعمود الثاني : $= 6 - 5 = 1$	للصف الثاني : $= 6 - 3 = 3$
للعمود الثالث : $= 10 - 9 = 1$	للصف الثالث : $= 7 - 4 = 3$

٢ - حيث أن أكبر فرق مطلق للتكلفة متساوي ويساوي 3 لذلك يتم اختيار أيهما عشوائياً ولتكن  $d_2$  للصف الثاني وتختار الخلية ذات التكلفة الأقل بهذا الصف وهي الخلية (1 , 2) ويتم شغلها بالكمية  $x_{21}$  ، حيث :

$$x_{21} = \min (S_2 , D_1) = \min (250 , 400) = 250 \text{ (وحدة)}$$

ويحذف العمود الثاني نظراً لإستيفائه بالكامل وتخفض الكمية المعروضة بجهة الاستخدام الأولى لتصبح كما يلي :

$$( \text{وحدة} ) 150 = ( 400 - 250 )$$

### الجدولة الثالثة :

١ - تحسب الفروق المطلقة ،  $d_3$  ، بين أدنى تكلفة والتكلفة التي تليها مباشرة لكل صف ولكل عمود كما يلي :

الأعمدة	الصفوف
للعمود الأول : $d_3 = 7 - 4 = 3$	للصف الأول : $d_3 = 7 - 5 = 2$
للعمود الثاني : $= 7 - 5 = 2$	للصف الثاني : $= 7 - 4 = 3$
للعمود الثالث : $= 10 - 9 = 1$	

٣ - حيث أن أكبر فرق مطلق للتكلفة متساوٍ ويساوي 3 لذلك يتم اختيار أيهما عشوائياً ولتكن  $d_3$  للعمود الأول وتختار الخلية ذات التكلفة الأقل بهذا العمود وهي الخلية (1, 3) ويتم شغلها بالكمية  $x_{31}$  ، حيث :

$$x_{31} = \min (S_3, D_1) = \min (300, 150) = 150 \text{ (وحدة)}$$

ويحذف العمود الأول نظراً لإستيفائه بالكامل وتخفض الكمية المطلوبة بالمصنع الثالث لتصبح :

$$(300 - 150) = 150 \text{ (وحدة)}$$

#### الجولة الرابعة :

١ - تحسب الفروق المطلقة ،  $d_4$  ، بين أدنى تكلفة والتكلفة التي تليها مباشرة لكل صف ولكل عمود كما يلي :

الصفوف الأعمدة

$$\begin{aligned} \text{للعמוד الأول : } d_4 &= 7 - 5 = 2 & \text{للفف الأول : } d_4 &= 10 - 5 = 5 \\ \text{للعמוד الثاني : } &= 10 - 9 = 1 & \text{للفف الثاني : } &= 9 - 7 = 2 \end{aligned}$$

٢ - حيث أن أكبر فرق مطلق للتكلفة ،  $d_4$  ، يساوي 5 ينتمي للصف الأول لذلك يتم اختيار الخلية التي لها أصغر تكلفة بهذا الصف وهي الخلية (1, 2) ويتم شغلها بالكمية  $x_{12}$  ، حيث :

$$x_{12} = \min (S_1, D_2) = \min (600, 350) = 350 \text{ (وحدة)}$$

ثم يحذف العمود الثاني نظراً لإستيفائه بالكامل وتخفض الكمية المعروضة بالمصنع الأول لتصبح :

$$(600 - 350) = 250 \text{ (وحدة)}$$

### الجدولة الخامسة :

حيث تم حذف كافة الأعمدة بمصفوفة النقل ماعدا العمود الثالث، لذلك يتم شغل خلاياه بطريقة المتمم الصلبي ، حيث نجد أن :

$$x_{31} = \min (250 , 400) = 250 \text{ (وحدة)}$$

$$x_{33} = \min (150 , 150) = 150 \text{ (وحدة)}$$

وتكون قيمة دالة الهدف في هذه الحالة هي :

$$Z = 5 (350) + 10 (250) + 3 (250) + 4 (250) + 4 (150) + 9 (150) = 7950 \text{ (جنيهاً)}$$

وكما هو واضح فإن قيمة دالة الهدف وفقاً لطريقة فوجل أقل من قيمتها في حالة استخدام طريقة أدنى تكلفة وهي أقل بدورها من قيمة دالة الهدف في حالة استخدام طريقة الركن الشمالي الغربي ، مما يؤكد أن طريقة فوجل تعد - في أغلب الحالات - أفضل من كل من طريقة الركن الشمالي الغربي وطريقة أقل تكلفة بمصفوفة النقل حيث أنها تعطي حلاً مبدئياً لنموذج النقل أكثر قرباً من الحل الأمثل ، إن لم يكن هو نفسه الحل الأمثل .

### ثانياً : اختبار أمثلية الحل وتحسينه إذا لزم الأمر

للتوصل إلى الحل الأمثل لنموذج النقل فإن ذلك يتطلب أولاً تحديد الحل المبدئي للنموذج الذي تم التوصل إليه بأي من طرق الحل السابقة ، ثم يلي ذلك اختبار أمثلية الحل المبدئي الذي تم التوصل إليه ، فإذا وجد أن الحل المبدئي هو نفسه الحل الأمثل فنكون قد توصلنا إلى الحل الأمثل المنشود لنموذج النقل ، أما إذا كان الحل المبدئي غير

أتمل فلي ذلك عملية تحسين الحل المبني وذلك من خلال اختيار المتغير الداخل والمتغير الخارج والانتقال إلى جولة جديدة تالية . وسوف نتناول بالتفصيل كيفية اختبار أمثلة الحل وكيفية تحسين الحل المبني إذا دعت الضرورة .

#### أ - اختبار أمثلة الحل

يتم اختبار أمثلة الحل المبني في نموذج النقل بنفس الفكرة المتبعة في طريقة السمبلكس والتي تعتمد على فكرة أثر تحويل المتغيرات غير الأساسية في الحل إلى متغيرات أساسية وإن كان ذلك سيتم في نموذج النقل بطريقة تتناسب مع خصائص هذا النموذج .

ويوجد عدة طرق يمكن بواسطتها اختبار أمثلة الحل منها طريقة الحلقات المغلقة والتي تسمى أحيانا طريقة محور الارتكاز وطريقة المضارب ، وسوف نركز هنا على الطريقة الأولى ، وهي طريقة الحلقات المغلقة ( أو محور الارتكاز ) باعتبارها من الطرق الأكثر شيوعاً .

#### Stepping – stone Method

#### طريقة الحلقات المغلقة

سوف نعتبر أن الخلايا المشغولة في مصفوفة النقل خلايا أساسية وهي تناظر المتغيرات الأساسية في الحل بطريقة السمبلكس ، بينما نعتبر باقي الخلايا غير المشغولة في مصفوفة النقل خلايا غير أساسية وهي تناظر المتغيرات غير الأساسية في الحل بطريقة السمبلكس ، وينبغي ملاحظة العلاقات التالية في مصفوفة النقل :

مجموع خلايا المصفوفة تساوى  $m \times n$

مجموع الخلايا الأساسية (أى المشغولة) ينبغى أن تساوى  $(m + n - 1)$

مجموع الخلايا غير الأساسية (أى غير المشغولة) تساوى

$$(mn - m - n + 1) = (m - 1)(n - 1)$$

حيث :  $m$  تشير إلى عدد صفوف مصفوفة النقل أى عدد مصادر العرض

$n$  تشير إلى عدد أعمدة مصفوفة النقل أى عدد جهات الاستخدام .

فوفقاً لطريقة الحلقات المغلقة (أى طريقة محاور الارتكاز) يتم

إجراء عملية تقييم للخلايا غير الأساسية فى الحل المبدئى ، حيث يتم

اختبار الأثر المحتمل على قيمة دالة الهدف ،  $Z$  ، عند تحويل الخلية

غير الأساسية موضع التقييم إلى خلية أساسية وذلك بدراسة أثر زيادة

تكلفة النقل بمقدار تكلفة نقل الوحدة من نفس الصف وهذا يستلزم

بدوره زيادة التكلفة فى خلية أساسية فى نفس العمود ويتم ذلك فى

سلسلة تكون إشاراتها كالتالى :  $+$  ،  $-$  ،  $+$  ،  $-$  ،  $+$  ،  $-$  ،  $+$  ،  $-$  ،  $+$  ،  $-$  ، وهكذا حتى

نصل إلى نهاية الحلقة المغلقة وذلك حتى يتم إعادة التوازن لمصفوفة

النقل .

فمسار الحلقة المغلقة يكون عبارة عن مضلع مغلق تكون نقطة

البداية فيه هى الخلية غير الأساسية موضع التقييم بينما تتكون جميع

أركانها الباقية من خلايا أساسية وتكون نقطة النهاية فى المسار هى

نفس الخلية غير الأساسية موضع التقييم ، ويلاحظ أن لكل خلية غير

أساسية مسار مغلق واحد في الحل ، ويراعى في تشكيل الحلقة المغلقة ما يلي :

- ١ - كل زوج من الخلايا المتتالية يقع إما في نفس الصف أو نفس العمود .
- ٢ - لا تقع ثلاث خلايا متتالية في نفس الصف أو العمود .
- ٣ - تقع الخلايا الأولى والأخيرة في نفس الصف أو نفس العمود .
- ٤ - لا تظهر أية خلية أكثر من مرة واحدة في التسلسل .

والقيمة النهائية في الحلقة المغلقة تعبر عن الأثر المحتمل على دالة الهدف في حالة تحويل الخلية موضع التقييم إلى خلية أساسية وهو ما يعرف أحياناً بتكلفة الفرصة . ويجب التنويه إلى أن القيمة النهائية في الحلقة المغلقة لن تختلف إذا بدأنا مسار الحلقة من العمود الذي تقع فيه الخلية موضع التقييم بدلاً من الصف .

وحيث أن الهدف هو تصغير تكلفة النقل إلى حد ما الأدنى فإن الحل المبدئي بعد حل أمثل إذا كانت نتائج عملية التقييم لجميع الخلايا غير الأساسية كلها قيماً موجبة أو صفر ، أما في حالة ظهور قيماً سالبة فإن ذلك يعنى أن الحل المبدئي ليس هو الحل الأمثل حيث يمكن تخفيض قيمة دالة الهدف باختيار الخلية غير الأساسية التي أعطت قيمة سالبة وتحويلها إلى خلية أساسية .

فعلى سبيل المثال ، إذا كانت نتيجة التقييم لإحدى الخلايا غير الأساسية هي :

10 : فيعنى ذلك زيادة قيمة التكاليف بدالة الهدف بمقدار 10 جنيهات للوحدة الواحدة المنقولة .

0 : فيعنى ذلك أن قيمة التكاليف بدالة الهدف لن تتغير سواء بالزيادة أو النقصان لكل وحدة منقولة .

5 - : فيعنى ذلك نقص قيمة التكاليف بدالة الهدف بمقدار 5 جنيهات للوحدة الواحدة المنقولة .

وذلك عند تحويل تلك الخلية غير الأساسية إلى خلية أساسية .

وفى حالة وجود أكثر من خلية غير أساسية لها نتائج تقييم سالبة فتؤخذ أولاً الخلية التى لها أكبر قيمة سالبة ويتم تحويلها إلى خلية أساسية حيث أنها تحقق خفض أكبر فى إجمالى تكاليف النقل بالنموذج .

### مثال (٨) :

المطلوب اختبار أمثلية الحل المبدئى المتحصل عليه بطريقة فوجل الوارد فى مثال (٧) .

الحل :

جدول الحل المبدئى المتحصل عليه وفقاً لطريقة فوجل فى مثال (٧) هو :



## النقل والتوزيع

جهة الاستهلاك المصنع	1	2	3	4	إجمالي العرض
A	7 350	5 250	10 250	8 250	600
B	3 250	6 250	12 250	4 250	500
C	4 150	7 150	9 150	15 250	300
إجمالي الطلب	400	350	400	250	

سوف تتم عملية التقييم لجميع الخلايا غير الأساسية بمصفوفة النقل ،  
فعلى سبيل المثال ، فإن عملية التقييم للخلية (1 , 1) سوف تتم على النحو  
التالى :

الخلية (1 , 1) إذا تم تحويلها إلى خلية أساسية وشغلها بوحدة  
واحدة من المنتج فإن ذلك يؤدي إلى زيادة تكلفة النقل بمعدل 7  
جنيهاً للوحدة الواحدة المنقولة ، إلا أن هذا يستلزم إنقاص وحدة  
واحدة من الخلية (1 , 3) بتكلفة قدرها 10 جنيهاً ( لم يتم اختيار  
الخلية (1 , 2) لأنها لا تؤدي إلى حلقة مغلقة ) ولتعويض هذا  
النقص فى الخلية (1 , 3) ينبغي زيادة وحدة واحدة فى الخلية  
(3 , 3) وبالتالي زيادة تكلفة النقل بمعدل 9 جنيهاً للوحدة المنقولة ،

## النقل والتشطيب

ويستلزم ذلك أيضا إنقاص وحدة واحدة من الخلية (1, 3) ، (3, 1) بنكلفة قدرها 4 جنيهات ، كما يتضح من الجدول التالي :

<div style="text-align: center;"> <div style="display: inline-block; transform: rotate(-45deg);">جهة الاستهلاك</div> <div style="display: inline-block; transform: rotate(45deg);">المصنع</div> </div>	1	2	3	4
A	<div style="text-align: center;">7</div> <div style="text-align: center;">+</div> <div style="text-align: center;">□</div>	<div style="text-align: center;">5</div>	<div style="text-align: center;">10</div> <div style="text-align: center;">-</div>	<div style="text-align: center;">8</div>
B	<div style="text-align: center;">3</div>	<div style="text-align: center;">6</div>	<div style="text-align: center;">12</div>	<div style="text-align: center;">4</div>
C	<div style="text-align: center;">4</div> <div style="text-align: center;">-</div>	<div style="text-align: center;">7</div>	<div style="text-align: center;">9</div> <div style="text-align: center;">+</div>	<div style="text-align: center;">15</div>

250

350

250

150

150

ويكون مسار الحلقة المغلقة للخلية (1, 1) على النحو التالي :

الخلية : (1, 1) (1, 3) (3, 3) (3, 1)

التكلفة : 7 - 10 + 9 - 4 = 2

هذه النتيجة تعني أنه إذا تم تحويل الخلية (1, 1) من خلية غير أساسية إلى خلية أساسية فإن ذلك يؤدي إلى زيادة تكلفة النقل في النهاية بمعدل 2 جنيه لكل وحدة منقولة من المنتج .

وفيما يلي نتائج عملية التقييم لجميع الخلايا غير الأساسية بمصفوفة النقل :

## النقل والتأطير

الخلية	مسار الحلقة المغلقة
(1, 1)	(1, 1) (1, 3) (3, 3) (3, 1)
التكلفة	$7 - 10 + 9 - 4 = 2$
(1, 4)	(1, 4) (2, 4) (2, 1) (3, 1) (3, 3) (1, 3)
التكلفة	$8 - 4 + 3 - 4 + 9 - 10 = 2$
(2, 2)	(2, 2) (1, 2) (1, 3) (3, 3) (3, 1) (2, 1)
التكلفة	$6 - 5 + 10 - 9 + 4 - 3 = 3$
(2, 3)	(2, 3) (3, 3) (3, 1) (2, 1)
التكلفة	$12 - 9 + 4 - 3 = 4$
(3, 2)	(3, 2) (3, 3) (1, 3) (1, 2)
التكلفة	$7 - 9 + 10 - 5 = 3$
(3, 4)	(3, 4) (2, 4) (2, 1) (3, 1)
التكلفة	$15 - 4 + 3 - 4 = 10$

وحيث أن نتائج عملية التقييم لجميع الخلايا غير الأساسية بمصفوفة النقل جميعها موجبة ، فيعنى ذلك أن الحل المبدئى المتحصل عليه بطريقة فوجل قد اجتاز اختبار الأمثلية ومن ثم فإنه يعد حل أمثل وذلك لأن تحويل أى خلية غير أساسية إلى خلية أساسية سوف يؤدي حتما إلى زيادة فى إجمالى تكلفة النقل بدالة الهدف .

ملحوظة :

إذا أعطت أى خلية غير أساسية نتيجة تقييم نهائية قيمتها صفر، فإن هذه النتيجة تعنى أن تحويل تلك الخلية إلى خلية أساسية لن يغير من قيمة دالة الهدف ومؤدى هذا أن الحل المبدئى المتحصل عليه سيظل حلاً أمثلاً ويوجد حل أمثل آخر يتضمن تلك الخلية كخلية أساسية .

ب - تحسين الحل المبدئى

إذا أظهرت عملية التقييم للخلايا غير الأساسية بمصفوفة النقل للحل المبدئى قيمة ( لو قيم ) سالبة فوعى ذلك أن الحل المبدئى المتحصل عليه لم يجتز اختبار الأمثلية ولم يعد بذلك حل أمثل ، ويستلزم الأمر تحسين هذا الحل عن طريق تحويل بعض الخلايا غير الأساسية التى أعطت معايير تقييم سالبة إلى خلايا أساسية ويتم ذلك على النحو التالى :

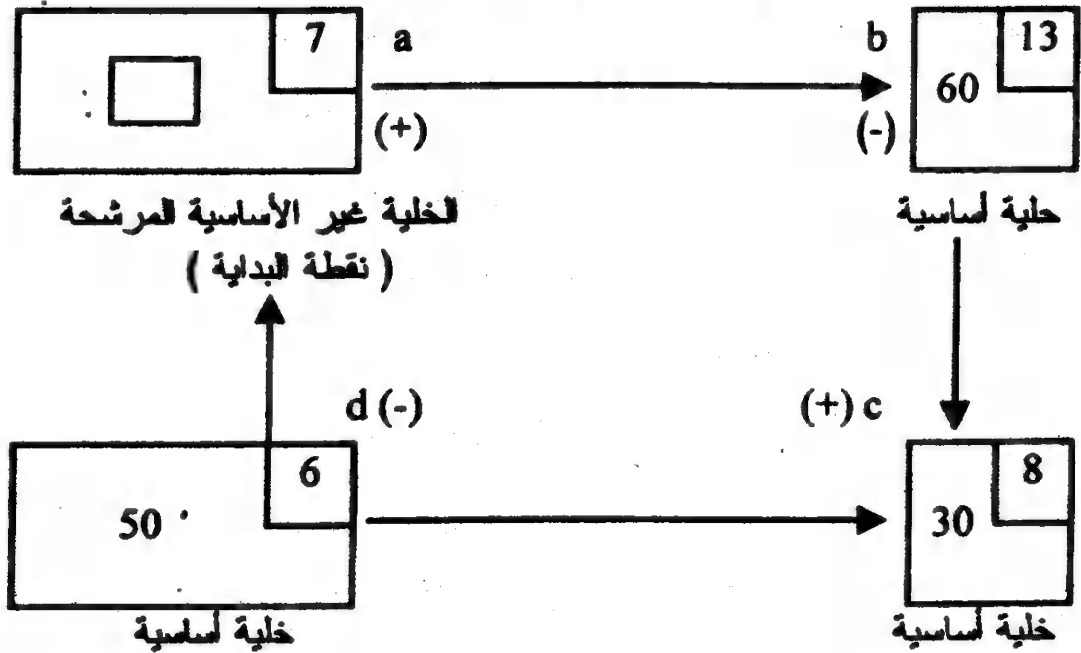
١ - يتم اختيار الخلية غير الأساسية التى تعطى أكبر قيمة مطلقة بإشارة سالبة لتحويلها إلى خلية أساسية وتناظر هذه الخلية المتغير الداخلى فى طريقة السمبلكس .

٢ - يتم اختيار الخلية الأساسية التى سوف تتحول إلى خلية غير أساسية على أساس تلك التى تصل إلى القيمة صفر لولا بزيادة قيمة الخلية غير الأساسية والتى تم تحويلها إلى خلية أساسية فى الخطوة (١) ويتم ذلك باختيار أصغر قيمة مطلقة للخلايا

## النقل والتعطيل

الأساسية ذات الإشارة السالبة في مسار الحلقة المغلقة لتكون هي القيمة التي يتم بها شغل الخلية غير الأساسية التي تم ترشيحها للدخول في الحل في هذه الجولة .

فعلى سبيل المثال ، إذا كان لدينا مسار الحلقة المغلقة التالية :



مسار الحلقة المغلقة هو :

المسار	a	b	c	d	
التكلفة	7	- 13	+ 8	- 6	= - 4

في هذه الحالة سوف يتم شغل الخلية (a) المرشحة بالكمية 50 وحدة وهي أصغر قيمة مطلقة بإشارة سالبة أى تساوى

$$\min (- 60 , - 50 ) = 50$$

## النقل والتخصيص

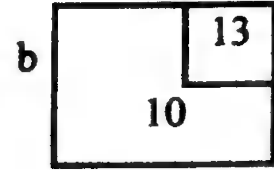
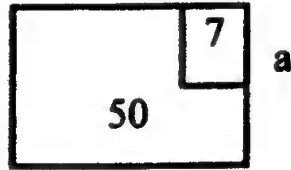
مع تجاهل الإشارة السالبة . وتؤدي هذه الخطوة حتماً إلى تحويل الخلية غير الأساسية ، ( a ) ، المرشحة كمتغير داخل إلى خلية أساسية ، وفي المقابل سوف تتحول خلية أساسية وهي الخلية المشغولة بأصغر قيمة مطلقة بإشارة سالبة ( وهي الخلية ( d ) ) إلى خلية غير أساسية .

ج - يتم الانتقال إلى الحل الجديد بتعديل الكميات المنقولة بالخلايا الواقعة على مسار الحلقة المغلقة فقط بالزيادة ثم بالنقص ثم بالزيادة ..... وهكذا . أما الكميات الموجودة بالخلايا الأساسية غير الواقعة على هذا المسار فتظل كما هي بدون تعديل .

ففي المثال السابق ، يتم شغل الخلية غير الأساسية المرشحة وهي الخلية ( a ) بالكمية 50 وحدة ثم ننقص الكمية الموجودة بالخلية ( b ) بمقدار 50 وحدة لتصبح : ( وحدات )  $10 = 60 - 50$  ثم تزيد الكمية الموجودة بالخلية ( c ) بمقدار 50 وحدة لتصبح : ( وحدة )  $80 = 30 + 50$  ، ثم ننقص الكمية الموجودة بالخلية ( d ) بمقدار 50 وحدة لتصبح :  $0 = 50 - 50$  .

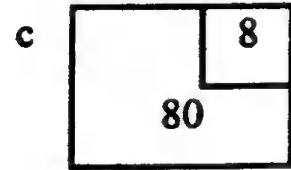
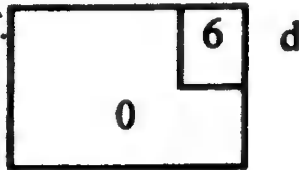
ومن ثم يصبح مسار الحلقة المغلقة بعد التعديل الجديد على

النحو التالي :



تحولت إلى خلية أساسية

خلية أساسية



أصبحت خلية غير أساسية

خلية أساسية

ولبيان أثر هذا التعديل في تحسين الحل المبدئي ، نلاحظ أن :

إجمالي تكاليف النقل في مسار الحلقة المغلقة قبل التعديل هي :

$$13 ( 60 ) + 8 ( 30 ) + 6 ( 50 ) = 1320 \text{ (جنيها)}$$

بينما إجمالي تكاليف النقل في مسار الحلقة المغلقة بعد التعديل هي :

$$7 ( 50 ) + 10 ( 13 ) + 8 ( 80 ) = 1120 \text{ (جنيها)}$$

ومعنى هذا أنه حدث تخفيض في قيمة تكاليف النقل الخاصة  
بمسار الحلقة المغلقة المبين .

مثال (٩) :

بفرض أنه يوجد ثلاث مزارع تنتج سلعة معينة وكانت الطاقة  
الإنتاجية السنوية القصوى (بالطن) للمزارع الثلاث هي على الترتيب  
80 , 100 , 120 . تقوم هذه المزارع بنقل إنتاجها إلى ثلاثة

## النقل والتوزيع

مراكز رئيسية للتوزيع طاقتها الاستيعابية السنوية القصوى (بالطن) هي على الترتيب 60 ، 80 ، 70 . فإذا علم أن تكلفة نقل الطن من المزارع إلى مراكز التوزيع (بالجنيه) موضحة بمصفوفة النقل التالية :

مركز التوزيع \ المزرعة	1	2	3
1	118	120	114
2	113	122	123
3	110	115	117

المطلوب :

- ١ - تحديد الحل المبدئي لنموذج النقل للسلعة مستخدماً طريقة فوجل .
- ٢ - اختبار أمثلية الحل المبدئي وتحسينه إذا لزم الأمر .

الحل :

١ - إجمالي الكميات المعروضة من السلعة من المزارع الثلاث هي :

$$(طن) 300 = 80 + 100 + 120$$

إجمالي الكميات المطلوبة من السلعة في مراكز التوزيع الثلاثة هي :

$$(طن) 210 = 60 + 80 + 70$$

وحيث أن إجمالي الكميات المعروضة أكبر من إجمالي

الكميات المطلوبة بمقدار 90 طن ، لذلك نضيف مركز توزيع وهمي

( أي تصدير ) بطاقة استيعابية تساوي 90 طن حتى يتساوى إجمالي

الكميات المعروضة مع إجمالي الكميات المطلوبة .



## النقل والتلصيص

d <sub>1</sub>	...	3	5	3	0
d <sub>2</sub>	...	3	5	6	0
d <sub>3</sub>	...	3	7	6	0
d <sub>4</sub>	...		<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">7</span>	6	

$$d_1, d_2, d_3, d_4$$

14

13 13 9 1

10 10 5 2

ويكون الحل المبدئي لنموذج النقل على النحو التالي :

$$x_{14} = 80 , x_{21} = 60 , x_{23} = 30 , x_{24} = 10 ,$$

$$x_{32} = 80 , x_{33} = 40 .$$

وقيمة دالة الهدف ،  $Z$  ، ( أى إجمالى تكاليف النقل ) فى هذه الجولة هى :

$$Z = 113 ( 60 ) + 115 ( 80 ) + 123 ( 30 ) +$$

$$117 ( 40 ) + 0 ( 80 ) + 0 ( 10 ) = 24350 \text{ (جنريها)}$$

٢ - لاختبار أمثلية الحل المبدئى المتحصل عليه باستخدام طريقة

الحلقات المغلقة تتم عملية التقييم لكافة الخلايا غير الأساسية

بمصفوفة الحل المبدئى الناتجة على النحو التالى :

الخلية	مسار الحلقة المغلقة
(1, 1)	(1, 1) (1, 4) (2, 4) (2, 1)
التكلفة	$118 - 0 + 0 - 113 = 5$
(1, 2)	(1, 2) (1, 4) (2, 4) (2, 3) (3, 3) (3, 2)
التكلفة	$120 - 0 + 0 - 123 + 117 - 115 = -1$
(1, 3)	(1, 3) (1, 4) (2, 4) (2, 3)
التكلفة	$114 - 0 + 0 - 123 = -9$

### النقل والتلطيح

(2, 2)	(2, 2) (2, 3) (3, 3) (3, 2)
التكلفة	$122 - 123 + 117 - 115 = 1$
(3, 1)	(3, 1) (3, 3) (2, 3) (2, 1)
التكلفة	$110 - 117 + 123 - 113 = 3$
(3, 4)	(3, 4) (3, 3) (2, 3) (2, 4)
التكلفة	$0 - 117 + 123 - 0 = 6$

وحيث أن عملية التقييم للخلايا غير الأساسية أعطت بعض القيم السالبة (الخليتان : (1, 2), (1, 3)) ، لذلك يتم ترشيح الخلية (1, 3) كمتغير داخل حيث أن لها أكبر قيمة مطلقة بإشارة سالبة وهي القيمة (-9) ويتم شغلها بالكمية  $x_{13}$  ، حيث :

$$x_{13} = \min (-80, -30) = 30$$

حيث يلاحظ أن : مسار الحلقة المغلقة قبل التعديل هو :

مركز التوزيع المزرعة	3	4
1	114	0
2	123	0

## النقل والتخصيص

بينما مسار الحلقة المغلقة بعد التعديل هو :

	3	4
1	114 30	0 50
2	123 0	0 40

حيث تحولت الخلية (3 , 1) إلى خلية أساسية بينما أصبحت الخلية (3 , 2) خلية غير أساسية ، في حين تظل باقي خلايا مصفوفة النقل في الحل المبني كما هي .

وتكون مصفوفة النقل للنموذج بعد هذا التعديل على النحو التالي :

مركز التوزيع المزرعة	1	2	3	4	إجمالي العرض
1	118 30	120	114 50	0	80
2	113 60	122	123 40	0	100
3	110	115 80	117 40	0 90	120
إجمالي الطلب	60	80	70	90	

### النقل والتأصيل

وفي ضوء هذا التعديل الذي أدخل على الحل المبدئي للنموذج يتم إعادة تقييم الخلية (2, 1) والتي كان لها (في الحل المبدئي قبل التعديل) قيمة سالبة على النحو التالي:

الخلية	مسار الحلقة المغلقة
(3, 2)	(3, 3) (1, 3) (1, 2) (1, 2)

$$\text{التكلفة} = 8 - 115 + 117 - 114 + 120 = 8$$

أي أنه بعد التعديل الأخير الذي أدخل على الحل المبدئي الأولي المتحصل عليه باستخدام طريقة فوجل أصبح للخلية (2, 1) نتيجة تقييم نهائية موجبة وهي (8) بعد أن كان لها قبل التعديل نتيجة تقييم نهائية سالبة وهي (-1).

نستنتج من ذلك أن حل نموذج النقل بعد التعديل أصبح هو الحل الأمثل وهو كما يلي:

$$x_{13} = 30, x_{14} = 50, x_{21} = 60, x_{24} = 40, \\ x_{32} = 80, x_{33} = 40.$$

وقيمة دالة الهدف،  $Z$ ، (أي إجمالي تكاليف النقل) هي:

$$Z = 114(30) + 0(50) + 113(60) + 0(40) + \\ 115(80) + 117(40) = 24080 \text{ (جنيها)}$$

وتشير هذه النتيجة إلى أن عملية تعديل الكميات الواجب نقلها في مسار الحلقة المغلقة والذي أدى إلى تحويل الخلية (3, 1) إلى خلية أساسية (أي متغير داخل) وتحويل الخلية (3, 2) إلى خلية

غير أساسية ( أى متغير خارج ) أدت إلى تحسين الحل المبدئى حيث انخفضت قيمة دالة الهدف من 24350 إلى 24080 جنبها .  
وجدير بالذكر أن عملية التعديل هذه سوف تؤدي حتماً إلى تحسين الحل المبدئى .

#### ملاحظات هامة حول نموذج النقل

أولاً : إذا كانت دالة الهدف فى نموذج النقل فى اتجاه الحد الأقصى

يحدث هذا الوضع عندما تكون الإمكانيات القصوى للإنتاج فى الفترة (  $i$  ) تساوى  $S_i$  والكمية المتاحة فى الفترة (  $j$  ) يجب الانتقال عن  $D_j$  مع ملاحظة أن  $t_{ij}$  تمثل ربع الوحدة الواحدة للسلعة المنتجة فى الفترة (  $i$  ) والمباعة فى الفترة (  $j$  ) ، وأيضاً عندما تتولى إحدى شركات النقل نقل السلعة من مصادر العرض  $S_i$  إلى جهات الاستخدام  $D_j$  ، حيث (  $i = 1, 2, \dots, m ; j = 1, 2, \dots, n$  )  
ففى هذه الحالة فإن  $t_{ij}$  والتى تمثل تكلفة نقل الوحدة الواحدة من السلعة المنتجة من المصدر  $S_i$  إلى جهة الاستخدام  $D_j$  سوف تعتبر من وجهة نظر شركة النقل إيراداً يجب تعظيمه إلى أقصى حد ممكن وليس تكلفة يجب تصغيرها إلى أدنى حد ممكن .

فى مثل هذه الحالات يمكن حل نموذج النقل بإحدى طريقتين هما :

### الطريقة الأولى :

- يتم تحديد أكبر عنصر  $t_{ij}$  ( أكبر ربح للوحدة ) في مصفوفة النقل ونرمز لهذا العنصر بالرمز  $\bar{t}$  .

- نستبدل جميع عناصر مصفوفة النقل وهي  $t_{ij}$  ( أى أرباح النقل ) بعناصر جديدة هي  $t'_{ij}$  ، حيث :

$$t'_{ij} = \bar{t} - t_{ij} \quad (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n)$$

- نفيس  $t'_{ij}$  للتكاليف النسبية ، وبذلك فإن هدف إيجاد الحد الأقصى

للمعائد ، أى  $(\text{Max} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n t_{ij} x_{ij})$  سوف يتحول إلى هدف إيجاد

الحد الأدنى للانحرافات  $t'_{ij}$  ، أى  $(\text{Min} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n t'_{ij} x_{ij})$  .

- يتم تحديد الحل المبدئى لنموذج النقل وصولاً إلى الحل الأمثل باستخدام أى من طرق الحل السابقة :

- بعد الوصول إلى الحل الأمثل يمكن تحديد قيمة دالة الهدف بإحدى طريقتين هما :

أ - بالرجوع إلى استخدام قيم  $t_{ij}$  الأصلية للمعاد مضروبة فى الكميات  $x_{ij}$  المتحصل عليها من الحل الأمثل لمصفوفة الانحرافات  $t'_{ij}$  ، أى أن قيمة دالة الهدف تحسب كما يلى :

$$Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n t_{ij} x_{ij}$$

ب - قيمة دالة الهدف - أقصى عائد ممكن تحقيقه - إجمالي قيمة التكاليف النسبية حيث :

أقصى عائد ممكن تحقيقه = أكبر عنصر  $t_{ij}$  للعائد في مصفوفة النقل الأصلية (أى  $\bar{t}$ )  $\times$  إجمالي الكميات المعروضة (أو المطلوبة) في المصفوفة ككل

$$\bar{t} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} =$$

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n t'_{ij} x_{ij} = \text{إجمالي التكاليف النسبية}$$

ومن ثم فوفقا لهذه الطريقة يلاحظ أن :

قيمة دالة الهدف تُحسب كما يلي :

$$Z = \bar{t} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n t'_{ij} x_{ij}$$

الطريقة الثانية :

ضرب معاملات دالة الهدف ،  $Z$  ، أى ضرب  $t_{ij}$  فى ( 1 - ) ثم استكمال باقى خطوات الحل كما بيّنا فى الأجزاء السابقة .

مثال ( ١٠ ) :

شركة للنقل عهد إليها بنقل منتج ما من أربعة مراكز للإنتاج إلى ثلاثة مراكز رئيسية للاستهلاك ، فإذا كانت الطاقات الإنتاجية القصوى



## النقل والتلطيح

(بالآف طن) لمراكز الإنتاج والاحتياجات القصوى (بالآف طن)  
لمراكز الاستهلاك وأيضاً مصفوفة العائد المتحقق (بالآف جنيه)  
للشركة من نقل الوحدة الواحدة من المنتج من كل مركز من مراكز  
الإنتاج إلى كل مركز من مراكز الاستهلاك موضحة بالشكل التالي :

الطاقة الإنتاجية القصوى	1	2	3	مركز الاستهلاك مركز الإنتاج
70	16	25	18	1
80	17	20	15	2
100	14	23	17	3
50	18	21	19	4
	100	120	80	الاحتياجات القصوى للاستهلاك

المطلوب :

إيجاد الحل الأمثل لنموذج النقل الذي يحقق أكبر عائد ممكن  
لشركة النقل .

الحل :

يتم الوصول إلى الحل الأمثل لنموذج النقل من خلال خطوتين هما :

- أ - تحديد الحل المبدئي للنموذج بإحدى طرق الحل السابقة .
- ب - اختبار أمثلية الحل المبدئي المتحصل عليه وتحسينه إذا لزم الأمر  
للوصول إلى الحل الأمثل .

١ - تحديد الحل المبدئي للنموذج :

سوف نستخدم طريقة فوجل التقريبية للحصول على الحل المبدئي للنموذج .

إجمالي الكميات المعروضة من المنتج من مراكز الإنتاج هي :

$$70 + 80 + 100 + 50 = 300 \text{ ( ألف طن )}$$

إجمالي الكميات المطلوبة من المنتج في مراكز الاستهلاك هي :

$$100 + 120 + 80 = 300$$

بلاحظ أن إجمالي الكميات المعروضة يساوي إجمالي الكميات المطلوبة، لذلك فإن النموذج يعد متوازياً .

وحيث أن معاملات دالة الهدف تعبر عن العائد المتحقق من عملية النقل، لذلك يتم طرح معاملات دالة الهدف من أكبر معامل للعائد بمصفوفة النقل وهو المعامل 25 فنحصل على الاتحركات عن أكبر قيمة للعائد وهي ما أطلقنا عليه التكاليف النسبية ويصبح الهدف بعد ذلك هو إيجاد الحد الأدنى لدالة الهدف بالنموذج المحول والذي يصبح على النحو التالي :

جهة الاستخدام الممنوع	1	2	3	إجمالي العرض
1	9	0	7	70
2	8	5	10	80
3	11	2	8	100
4	7	4	6	50
إجمالي الطلب	100	120	80	

$d_1 : 1$   
 $d_2 : 1$   
 $d_3 : 1$   
 $d_4 : 1$

$d_1 : 1$   
 $d_2 : 2$   
 $d_3 : 2$   
 $d_4 : 4$

$d_1, d_2, d_3, d_4$

7

3 3 2 2

6 6 3

2 2 1 1

ب - لاختبار أمثلة الحل المبني الذي تم الحصول عليه يتم إجراء عملية التقييم لجميع الخلايا غير الأساسية بمصفوفة النقل كما يلي :

الخلية	مسار الحلقة المغلقة
(1, 1)	(1, 1) (1, 2) (3, 2) (3, 3) (4, 3) (4, 1)
التكلفة	$9 - 0 + 2 - 8 + 6 - 7 = 2$
(1, 3)	(1, 3) (3, 3) (3, 2) (1, 2)
التكلفة	$7 - 8 + 2 - 0 = 1$
(2, 2)	(2, 2) (3, 2) (3, 3) (4, 3) (4, 1) (2, 1)
التكلفة	$5 - 2 + 8 - 6 + 7 - 8 = 4$
(2, 3)	(2, 3) (4, 3) (4, 1) (2, 1)
التكلفة	$10 - 6 + 7 - 8 = 3$
(3, 1)	(3, 1) (3, 3) (4, 3) (4, 1)
التكلفة	$11 - 8 + 6 - 7 = 2$
(4, 2)	(4, 2) (4, 3) (3, 3) (3, 2)
التكلفة	$4 - 6 + 8 - 2 = 4$

حيث أن نتائج التقييم لجميع الخلايا غير الأساسية بمصفوفة النقل جميعها قيماً موجبة فيكون الحل المبدئي المتحصل عليه باستخدام طريقة فوجل هو الحل الأمثل ، وهو على النحو التالي :

$$x_{12} = 70 , x_{21} = 80 , x_{32} = 50 ,$$

$$x_{33} = 50 , x_{41} = 20 , x_{43} = 30 .$$

يتم الحصول على قيمة دالة الهدف وذلك بضرب الكميات  $x_{ij}$  المتحصل عليها من الحل الأمثل في القيم الأصلية المناظرة لمعاملات دالة الهدف قبل إجراء عملية الطرح على النحو التالي :

$$Z = 25 ( 70 ) + 17 ( 80 ) + 23 ( 50 ) + 17 ( 50 ) + 18 ( 20 ) = 6040 \text{ ( ألف جنيه )}$$

كما يمكن إيجاد قيمة دالة الهدف بطريقة أخرى بديلة على النحو التالي :

قيمة دالة الهدف = أقصى عائد يمكن تحقيقه

- قيمة الانحرافات عن أكبر عائد بمصفوفة النقل .

أي أن :

$$Z = 25 ( 300 ) - [ 0 ( 70 ) + 8 ( 80 ) + 2 ( 50 ) + 8 ( 50 ) + 7 ( 20 ) + 6 ( 30 ) ] = 7500 - 1460 = 6040 \text{ ( ألف جنيه )}$$

ثانياً : لكي يكون الحل المتحصل عليه لنموذج النقل في أي جولة من جولات الحل ممكناً يشترط أن يحصى على  $(m + n - 1)$  من الخلايا الأساسية ، أما إذا كان عدد الخلايا الأساسية في أي جولة

من جولات الحل أصغر من هذا العدد ، وهذا يحدث عندما تتساوى الكمية المعروضة من أحد المصادر مع الكمية المطلوبة فى أحد جهات الاستخدام حيث يتم استنفاد الصف (الممثل لجهة العرض) والعمود (الممثل لجهة الاستخدام) فى نفس الوقت . وفى هذه الحالة يتعذر تتبع مسار الحلقة المغلقة عند إجراء عملية التقييم للخلايا غير الأساسية ، ويقال فى هذه الحالة أن الحل يعانى من حالة الانتكاس .

ويتم علاج هذه الحالة وذلك بإضافة عدد من الخلايا الأساسية الوسيطة ( أو الوهمية ) يساوى الفرق بين العدد  $(m + n - 1)$  وعدد الخلايا الأساسية الحالية وشغلها بقيم  $x_{ij}$  مساوية لأصفار واعتبارها خلايا أساسية ، هذه الخلايا الأساسية الوهمية سوف تمكن من إجراء عملية التقييم لجميع الخلايا غير الأساسية دون أن يؤثر ذلك على توازن نموذج النقل .

ويتم تحديد الخلايا الأساسية الوهمية على أساس اختيار الخلايا التى لها أقل تكلفة نقل متبقية فى الصف أو العمود وشغلها بكميات تساوى أصفار .

## (٢ - ٢) نماذج التخصيص

ينشأ نموذج التخصيص إذا كان هناك  $n$  شخص (أو آلة) ومطلوب تنفيذ  $n$  عمل (أو مهمة)، ويقوم كل شخص (أو آلة) بتنفيذ عمل واحد (أو مهمة واحدة) فقط، كما أن العمل (أو المهمة) ينفذ باستخدام شخص واحد (أو آلة واحدة) فقط (أي أن العلاقة بينهما هي علاقة واحد / بواحد)، وبفرض أن تكلفة إنجاز الشخص (أو الآلة)  $i$  للعمل (أو المهمة)  $j$  تساوي  $c_{ij}$ ، ويكون الهدف المطلوب هو تخصيص شخص (أو آلة) لكل عمل (أو مهمة) بحيث تكون تكلفة التخصيص الإجمالية أصغر ما يمكن.

فلذا اعتبرنا أن الأشخاص (أو الآلات) تمثل مصادر للعرض، وأن الأعمال (أو المهمات) الواجب تنفيذها تمثل مصادر للطلب فإن نموذج التخصيص يعد على أنه حالة من نموذج النقل، إلا أن نموذج التخصيص يتميز بعدة خصائص إضافية هي:

١ - أن عدد الأشخاص (أو الآلات)، أي جهات العرض، ينبغي أن يعادل عدد الأعمال (أو المهمات)، أي جهات الطلب، أي أن:

$$m = n$$

وبالتالي فإن مصفوفة تكاليف التخصيص تكون مصفوفة مربعة من الترتيب  $n \times n$ .

٢ - أن كل شخص (أو آلة) يمكن استخدامه (أو استخدامها) مرة واحدة فقط، ولتنفيذ عمل (أو مهمة) واحدة فقط، وهذا يعني أن:

$$S_i = D_j = 1$$

أى أن :

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = \sum_{i=1}^n x_{ij} = 1$$

٣ - أن الشخص الواحد ( أو الآلة الواحدة ) إما أن يستخدم فى تنفيذ عمل (أو مهمة) معين أو لا يستخدم ، ويعبر عن ذلك كما يلى :

إذا استخدم الشخص ( أو الآلة )  $i$  فى تنفيذ العمل (أو المهمة)  $j$  فلن :

$$x_{ij} = 1$$

أما إذا لم يستخدم الشخص ( أو الآلة )  $i$  فى تنفيذ العمل (أو المهمة)  $j$  فلن :

$$x_{ij} = 0$$

ومعنى ذلك أنه :

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{إذا قام الشخص } i \text{ بتنفيذ العمل } j \\ 0 & \text{إذا لم يقم الشخص } i \text{ بتنفيذ العمل } j \end{cases}$$

ويمكن صياغة هذا الشرط كما يلى :

$$x_{ij} = x_{ij}^2 \quad (i, j = 1, 2, 3, \dots, n)$$

ويمكن تصوير عناصر نموذج التخصيص فى الجدول التالى :



الاستخدامات (عمل أو مهمة) المصادر (أشخاص أو آلات)	1	2	...	n	العرض
1	$x_{11}$	$x_{12}$	...	$x_{1n}$	1
2	$x_{21}$	$x_{22}$	...	$x_{2n}$	1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n	$x_{n1}$	$x_{n2}$	...	$x_{nn}$	1
الطلب	1	1	...	1	

### (٢-٢-١) صياغة نماذج التخصيص

يكون الشكل النمطي لنموذج التخصيص في الصورة التالية :

المطلوب إيجاد قيم  $(i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, n)$  ،  $x_{ij}$  ،

التي تحقق ما يلي :

$$\text{Min } Z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_{ij} t_{ij}$$

بشرط أن :

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1$$

$$x_{ij} = 0 \text{ أو } 1$$

وجدير بالذكر إذا تم استبدال الشرط الأخير وأصبح على النحو

التالى :

$$x_{ij} \geq 0$$

فإنشأ لدينا حينئذ نموذج نقل بحيث أن إجمالي الكميات المعروضة بكل مصدر عرض يساوى إجمالي الكميات المطلوبة بكل جهة استخدام يساوى الواحد الصحيح .

وكما هو واضح فإن نموذج التخصيص يعد حالة خاصة من نموذج النقل مع ملاحظة أن :

$$S_i = D_j = 1 \text{ \& } m = n$$

وإذا لم يتحقق الشرط  $m = n$  نضيف أشخاص وهميين أو أعمال وهمية حتى تتحقق تلك المساواة ويتم استعادة التوازن بين عدد الأشخاص ( أو الآلات ) وعدد الأعمال ( أو المهمات ) .

**مثال ( ١ ) :**

بفرض أنه يوجد ثلاثة فنيين هم :  $T_1$  ,  $T_2$  ,  $T_3$  يمكن أن يعمل كل منهم على أى من الآلات الثلاثة وهى :  $M_1$  ,  $M_2$  ,  $M_3$  . فإذا كانت تكلفة استخدام الفنى  $T_i$  لتشغيل الآلة  $M_j$  (بالجنيه) فى اليوم موضعاً بالمصفوفة التالية :

الآلة \ الفني	M <sub>1</sub>	M <sub>2</sub>	M <sub>3</sub>
T <sub>1</sub>	11	14	6
T <sub>2</sub>	8	10	11
T <sub>3</sub>	9	12	7

المطلوب : هو صياغة المشكلة في الشكل النمطي لنموذج التخصيص.

الحل :

بفرض أن  $(i = 1, 2, 3 ; j = 1, 2, 3)$  ،  $x_{ij}$  يشير إلى تخصيص الفني  $i$  لإستخدام الآلة  $j$  ، فيكون المطلوب هو إيجاد قيم  $x_{ij}$  التي تحقق ما يلي :

$$\text{Min } Z = 11x_{11} + 14x_{12} + 6x_{13} + 8x_{21} + 10x_{22} + 11x_{23} + 9x_{31} + 12x_{32} + 7x_{33}$$

بشرط أن :

قيود العرض (بالنسبة للفنيين) :

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 1$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 1$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} = 1$$

قيود الطلب (بالنسبة للآلات) :

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 1$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 1$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 1$$

نقد نموذج التخصيص :

$$x_{ij} = 0 \text{ أو } 1$$

أو

$$x_{ij} = x_{ij}^2 \quad (i=1, 2, 3; j=1, 2, 3)$$

مثال ( ٢ ) :

بفرض أن إدارة الدفاع المدني بمحافظة الشرقية تمتلك ثلاثة أنواع من سيارات الإطفاء هي :  $C_1, C_2, C_3$  مختلفة في إمكاناتها وتجهيزاتها ، وتم تقسيم محافظة الشرقية إلى أربعة مناطق جغرافية هي :  $R_1, R_2, R_3, R_4$  حسب طبيعة الأنشطة بكل منطقة، فإذا كان زمن الانتقال ( بالدقيقة ) لسيارات الإطفاء إلى المناطق الجغرافية كما يلي :

المنطقة سيارة الإطفاء	$R_1$	$R_2$	$R_3$	$R_4$
$C_1$	20	25	15	10
$C_2$	15	30	20	18
$C_3$	40	15	45	30

وترغب الإدارة في تخفيض زمن انتقال سيارة الإطفاء إلى أي من المناطق الأربعة في حالة نشوب حريق .  
المطلوب هو صياغة المشكلة في الشكل النمطي لنموذج التخصيص .

الحل :

حيث أن لدينا ثلاثة أنواع من سيارات الإطفاء وأربعة مناطق جغرافية لذا فإن الأمر يستلزم إضافة مصدر عرض وهو عبارة عن سيارة إطفاء وهمية يرمز لها بالرمز  $C_4$  حتى يتحقق التوازن بين مصادر العرض وهي السيارات وجهات الطلب وهي المناطق الجغرافية ، على أن تكون لزمنة انتقال السيارة الوهمية إلى المناطق المختلفة تساوى أصفار ، ومن ثم تكون مصفوفة لزمنة التخصيص كما يلي :

المنطقة سيارة الإطفاء	$R_1$	$R_2$	$R_3$	$R_4$
$C_1$	20	25	15	10
$C_2$	15	30	20	18
$C_3$	40	15	45	30
$C_4$	0	0	0	0

بفرض أن  $(i = 1, 2, 3, 4; j = 1, 2, 3, 4)$  ،  $x_{ij}$

يشير إلى تخصيص سيارة الإطفاء  $i$  للمنطقة  $j$  ، فيكون

المطلوب هو إيجاد قيم  $x_{ij}$  التي تحقق الهدف التالي :

$$\begin{aligned} \text{Min } Z = & 20x_{11} + 25x_{12} + 15x_{13} + 10x_{14} + \\ & 15x_{21} + 30x_{22} + 20x_{23} + 18x_{24} + \\ & 40x_{31} + 15x_{32} + 45x_{33} + 30x_{34} + \\ & 0(x_{41}) + 0(x_{42}) + 0(x_{43}) + 0(x_{44}) \end{aligned}$$

بشرط أن :

قيود العرض ( بالنسبة لمسيارات الإطفاء ) :

$$X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} = 1$$

$$X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} = 1$$

$$X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34} = 1$$

$$X_{41} + X_{42} + X_{43} + X_{44} = 1$$

قيود الطلب ( بالنسبة للمناطق الجغرافية ) :

$$X_{11} + X_{21} + X_{31} + X_{41} = 1$$

$$X_{12} + X_{22} + X_{32} + X_{42} = 1$$

$$X_{13} + X_{23} + X_{33} + X_{43} = 1$$

$$X_{14} + X_{24} + X_{34} + X_{44} = 1$$

قيود التخصيص :

$$X_{ij} = 0 \text{ أو } 1$$

أو

$$X_{ij} = X_{ij}^2, (i = 1, 2, 3, 4; j = 1, 2, 3, 4)$$

(٢-٢-٢) حل نماذج التخصيص

نظراً للطبيعة الخاصة لنموذج التخصيص فإنه يوجد عدة طرق  
لحل النموذج تتميز بدرجة عالية من التبسيط ، وذلك بخلاف طريقة  
السبيلكن أو طرق حل نموذج النقل التي سبق عرضها ، نذكر من  
هذه الطرق طريقة التعديل والطريقة التجريبية .

### ١ - طريقة التعداد Enumeration Method

نتلخص هذه الطريقة في حصر جميع التخصيصات الممكنة ثم اختيار التخصيص ذا التكلفة الأقل .

فعلى سبيل المثال ، إذا اعتبرنا مصفوفة التخصيص الواردة في مثال (١) وهي مصفوفة من الترتيب  $(3 \times 3)$  ، يلاحظ ما يلي :

إذا تم تخصيص الفنى  $T_1$  للعمل على الآلة  $M_1$  ، والفنى  $T_2$  للعمل على الآلة  $M_2$  ، والفنى  $T_3$  للعمل على الآلة  $M_3$  ، فإن تكلفة التخصيص الكلية تصبح كما يلي :

$$11 + 10 + 7 = 28 \text{ (جنيها)}$$

والجدول التالي يبين جميع التخصيصات الممكنة وعددها يساوى  $(3 \times 2 \times 1) = 3!$  أو 6

الآلة			تكلفة التخصيص	إجمالي تكلفة التخصيص
M <sub>1</sub>	M <sub>2</sub>	M <sub>3</sub>		
T <sub>1</sub>	T <sub>2</sub>	T <sub>3</sub>	11 + 10 + 7	28
T <sub>1</sub>	T <sub>3</sub>	T <sub>2</sub>	11 + 12 + 11	34
T <sub>2</sub>	T <sub>1</sub>	T <sub>3</sub>	8 + 14 + 7	29
T <sub>2</sub>	T <sub>3</sub>	T <sub>1</sub>	8 + 12 + 6	26
T <sub>3</sub>	T <sub>1</sub>	T <sub>2</sub>	9 + 14 + 11	34
T <sub>3</sub>	T <sub>2</sub>	T <sub>1</sub>	9 + 10 + 6	25

وكما يتضح من جدول التخصيصات السابق فإن أقل تكلفة تخصيص إجمالية تساوي 25 ويتحقق ذلك عندما يتم تخصيص الفني T<sub>1</sub> للعمل على الآلة M<sub>3</sub> ، وتخصيص الفني T<sub>2</sub> للعمل على الآلة M<sub>2</sub> ، وتخصيص الفني T<sub>3</sub> للعمل على الآلة M<sub>1</sub> .

إلا أن طريقة حصر جميع التخصيصات الممكنة تعتبر طريقة غير عملية ومرهقة حسابياً ، فإذا كانت مصفوفة التخصيص من الترتيب ( 4 × 4 ) فسوف ينشأ ( 1 × 2 × 3 × 4 = ) 4! أو 24 تخصيصاً ممكناً ، بينما إذا كانت مصفوفة التخصيص من الترتيب ( 8 × 8 ) فسوف ينشأ ( 1 × 2 × 3 × 4 × 5 × 6 × 7 × 8 = ) 8! أو 40320 تخصيصاً ممكناً ، وبالطبع حصر هذه التخصيصات أمر مستحيل .



## ب - الطريقة المجرية The Hungarian Method

تعد الطريقة المجرية من أفضل الطرق لحل نموذج التخصيص، وقبل أن نعرض لهذه الطريقة سوف نثبت أولاً صحة النظرية التالية :

إن الحل الأمثل لنموذج التخصيص لا يتغير إذا أضفنا ( أو طرحنا ) مقداراً ثابتاً إلى ( أو من ) أى صف أو أى عمود فى مصفوفة تكاليف التخصيص .

إذا كانت  $u_i$  ,  $v_j$  ثوابت تطرح من الصف  $i$  والعمود  $j$  من مصفوفة تكاليف التخصيص على الترتيب ، فإن عناصر التكاليف بالمصفوفة تصبح كما يلى :

$$t'_{ij} = t_{ij} - u_i - v_j$$

وتصبح بالتالى دالة الهدف الجديدة كما يلى :

$$\begin{aligned} Z' &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n t_{ij} x_{ij} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (t_{ij} - u_i - v_j) x_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n t_{ij} x_{ij} - \sum_{i=1}^n u_i \sum_{j=1}^n x_{ij} - \sum_{j=1}^n v_j \sum_{i=1}^n x_{ij} \end{aligned}$$

وحيث أنه ضمن قيود نموذج التخصيص

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1$$

فإن :

$$Z' = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n t_{ij} x_{ij} - \sum_{i=1}^n u_i \sum_{j=1}^n v_j$$

مقدار ثابت - Z =

ويعنى ذلك أن تكدية دالة الهدف الأصلية Z يعطى نفس الحل مثل تكدية دالة الهدف الجديدة Z' .

وتتلخص الطريقة المجرية لحل نموذج التخصيص من الترتيب (n × n) فى الخطوات الآتية :

خطوة 1 : (a) : لكل صف من صفوف مصفوفة تكاليف التخصيص نحدد أصغر عنصر تكلفة ونطرحه من جميع عناصر ذلك الصف .

(b) : لكل عمود من أعمدة مصفوفة تكاليف التخصيص المتحصل عليها فى (a) نحدد أصغر عنصر تكلفة ونطرحه من جميع عناصر ذلك العمود .

وفى هذه الحالة فإن مصفوفة تكاليف التخصيص المعدلة سوف تحتوى حتماً على عنصر صفرى واحد على الأقل فى كل صف وفى كل عمود .

خطوة 2 : نغطى جميع الأصفار فى مصفوفة التكاليف المعدلة بأقل عدد ممكن من الخطوط الأفقية والرأسية ، مع ملاحظة أن الخط الأفقى يجب أن يمر خلال الصف بكامله ، وكذلك

يجب أن يمر الخط الرأسى بالعمود بكامله . وبفرض أن عدد الخطوط الكلية للتغطية يساوى  $n_1$  ، فإذا كان  $n_1 = n$  فسوف يتم الحصول على التخصيص الأمثل للنموذج، إما إذا كان  $n_1 < n$  تنتقل إلى الخطوة (3) .

**الخطوة (3) :** يتم تحديد أصغر عنصر تكلفة فى مصفوفة عناصر التكاليف غير المغطاة بخط ، ونطرح هذا العنصر من جميع العناصر غير المغطاة ، ثم نضيف العنصر المذكور إلى العناصر التى تقع عند تقاطع الخطوط الأفقية مع الخطوط الرأسية ، ثم نعود للخطوة 2 لإجراء عملية التغطية لجميع الأصفار فى المصفوفة الناتجة بأقل عدد ممكن من الخطوط الأفقية والرأسية ،  $n_1$  ، ويستمر تكرار الخطوة (3) إلى أن نصل إلى حالة  $n_1 = n$  .

**الخطوة (4) :** تستخدم مصفوفة تكاليف التخصيص المعدلة المتحصل عليها فى الخطوة (3) للوصول إلى التخصيص الأمثل للنموذج ، حيث نبدأ بالبحث عن الصف ( أو العمود ) الذى يحتوى على عنصر صفرى وحيد ونخصص هذا العنصر الصفرى ثم نشطب الصف والعمود اللذين يحددان العنصر الصفرى المذكور . نكرر ذلك على مصفوفة التخصيص المختصرة بعد الشطب إلى أن نصل إلى التخصيص الأمثل .

### مثال (٣) :

شركة بترول لديها أربع سفن عملاقة للتقريب عن البترول هي :  
 $S_1, S_2, S_3, S_4$  ، وتود الشركة في تخصيصها لأربعة مناطق  
 بحرية هي :  $A, B, C, D$  . فإذا كانت تكلفة نقل السفن إلى  
 مناطق التقريب ( بالآلاف جنيه ) موضحة بالمصفوفة التالية :

الموقع السفينة	A	B	C	D
$S_1$	11	14	16	13
$S_2$	19	17	20	19
$S_3$	14	15	21	17
$S_4$	18	17	18	15

المطلوب : إيجاد التخصيص الأمثل للسفن لمناطق التقريب .

الحل :

للاصول على التخصيص الأمثل للسفن لمناطق التقريب يتم ذلك  
 من خلال الخطوات التالية :

خطوة 1 : (a) : نحدد أصغر عنصر تكلفة بكل صف من صفوف مصفوفة  
 تكاليف التخصيص ، أي  $(i = 1, 2, 3, 4)$  ،  $u_i$  ، كما  
 يتضح بالمصفوفة (1) .

مصفوفة ( 1 )

الموقع السفينة	A	B	C	D	$u_i$
$S_1$	11	14	16	13	11
$S_2$	19	17	20	19	17
$S_3$	14	15	21	17	14
$S_4$	18	17	18	15	15

نطرح القيمة  $u_i$  من جميع عناصر الصف  $i$  ، حيث

$i = 1, 2, 3, 4$  فنحصل على المصفوفة (2) .

(b) : نحدد أصغر عنصر تكلفة بكل عمود من أعمدة مصفوفة

تكاليف التخصيص (2) ، أي  $(j = 1, 2, 3, 4)$  ،  $v_j$

كما يتضح بالمصفوفة ( 2 ) .

مصفوفة ( 2 )

الموقع السفينة	A	B	C	D
$S_1$	0	3	5	2
$S_2$	2	0	3	2
$S_3$	0	1	7	3
$S_4$	3	2	3	0
$v_j$	0	0	0	0

## النقل والتلخيص

نطرح القيمة  $v_j$  من عناصر العمود  $j$  ، حيث  $j = 1, 2, 3, 4$  فنحصل على المصفوفة (3) .

مصفوفة ( 3 )

الموقع السفينة	A	B	C	D
$S_1$	0	3	2	2
$S_2$	-2	0	0	-2
$S_3$	0	1	4	3
$S_4$	-3	-2	0	0

الخطوة (2) : نغطي جميع الأصفار في مصفوفة تكاليف التخصيص  
(3) بأقل عدد ممكن من خطوط التغطية الأفقية والرأسية  
كما هو مبين . وحيث أن عدد خطوط التغطية يساوي  
 $n_1 = 3$  ، وهو أصغر من  $(n = 4)$  وبالتالي لم  
نصل بعد إلى التخصيص الأمثل .

الخطوة (3) : نحدد أصغر عنصر غير مغطى بالمصفوفة (3) وهو  
الواحد الصحيح ، وبطرحه من جميع عناصر تلك  
المصفوفة غير المغطاة ، وإضافته إلى عناصر تقاطع

## النقل والتخصيص

خطوط التغطية الأفقية والرأسية نحصل على مصفوفة التخصيص (4) .

مصفوفة (4)

الموقع السفينة	A	B	C	D
$S_1$	0	2	1	1
$S_2$	3	0	0	2
$S_3$	0	0	3	2
$S_4$	4	2	0	0

نغطي جميع الأصفار في مصفوفة تكاليف التخصيص (4) بأقل عدد ممكن من خطوط التغطية الأفقية والرأسية كما هو مبين .

وحيث أن عدد خطوط التغطية يساوي  $n_1 = 4$  ، وهو يساوي  $(n = 4)$  ، نكون قد وصلنا إلى التخصيص الأمثل .

الخطوة (4) : من مصفوفة التخصيص (4) نحصل على التخصيص الأمثل وذلك باختيار أربعة عناصر صفيرية مستقلة على النحو التالي :

حيث أن الصف الأول من المصفوفة يحتوى على عنصر صفرى وحيد فى الخلية  $(S_1, A)$  لذلك نضع  $x_{11} = 1$  ، أى نخصص السفينة  $S_1$  للموقع  $A$  ونحذف الصف الأول والعمود الأول .

وحيث أن العمود الرابع يحتوى أيضا على عنصر صفرى وحيد فى الخلية  $(S_4, D)$  لذلك نضع  $x_{44} = 1$  ، أى نخصص السفينة  $S_4$  للموقع  $D$  ويتم حذف الصف الرابع والعمود الرابع من المصفوفة .

وحيث أن الصف الثالث من المصفوفة المختصرة ، بعد الحذف ، أصبح يحتوى على عنصر صفرى وحيد فى الخلية  $(S_3, B)$  لذلك نضع  $x_{32} = 1$  ، بمعنى تخصيص السفينة  $S_3$  للموقع  $B$  ويتم حذف الصف الثالث والعمود الثانى ، وأخيراً نضع  $x_{23} = 1$  ، بمعنى تخصيص السفينة  $S_2$  للموقع  $C$  .

وتكون سياسة التخصيص المتلى على النحو التالى :

السفينة  $S_1$  يجب تخصيصها للموقع  $A$

السفينة  $S_2$  يجب تخصيصها للموقع  $C$

السفينة  $S_3$  يجب تخصيصها للموقع  $B$

السفينة  $S_4$  يجب تخصيصها للموقع  $D$

وتكون تكلفة التخصيص المتلى هى :

$$11 + 20 + 15 + 15 = 51 \text{ (ألف جنيه)}$$



## ملاحظات هامة حول نموذج التخصيص

أولاً : إذا كانت مصفوفة التخصيص غير مربعة من الترتيب  $m \times n$  حيث  $m \neq n$

قد يحدث في بعض الأحيان أن يكون نموذج التخصيص غير مربع ، ويحدث ذلك عندما يكون عدد مصادر العرض (  $m$  ) أكبر من عدد جهات الاستخدام (  $n$  ) أو العكس . ولإستخدام الطريقة المجرية لحل النموذج يلزم أن يكون النموذج مربعاً بمعنى  $m = n$  ويتم ذلك كما يلي :

إذا كان عدد مصادر العرض (  $m$  ) أكبر من عدد جهات الاستخدام (  $n$  ) فنفترض وجود جهات استخدام وهمية تعادل الفرق (  $m - n$  ) بعناصر تكلفة صفرية ، وإذا كان عدد جهات الاستخدام (  $n$  ) أكبر من عدد مصادر العرض (  $m$  ) فنفترض وجود مصادر عرض وهمية تعادل الفرق (  $n - m$  ) بعناصر تكلفة صفرية ، وذلك لاستعادة الصورة المربعة لنموذج التخصيص .

### مثال (٤) :

شركة مقاولات لديها حفار فائض عن حاجة العمل في كل مدينة من المدن التالية : A, B, C, D ويوجد حفار عجز في مواقع الشركة بالمدن الخمس التالية : 1, 2, 3, 4, 5 ، وترغب الشركة في تغطية هذا العجز بنقل الحفارات من المدن التي بها فائض إلى تلك التي بها عجز .

## النقل والتخطيط

فإذا كانت المسافة بين المدن المختلفة بالكيلومتر موضحة بالمصفوفة التالية :

مدن العجز مدن الفائض	1	2	3	4	5
A	12	10	15	22	18
B	10	18	25	15	16
C	11	10	3	8	5
D	6	14	10	13	13

المطلوب : إيجاد التخصيص الأمثل للحفارات من مدن الفائض إلى مدن العجز بحيث تكون مسافات الانتقال أصغر ما يمكن .

**الحل :**

يوجد أربع مدن بكل منها حفار فائض تمثل مصادر للعرض وخمس مدن بكل منها حفار عجز تمثل جهات للإستخدام ، وحيث أن مصفوفة التخصيص ينبغي أن تكون مربعة فلزم إضافة مدينة وهمية إلى المدن التي بها حفار فائض ولتكن المدينة E على أن تكون المسافات بينها وبين المدن التي بها حفار عجز عبارة عن عناصر صفرية، وتكون مصفوفة مسافات التخصيص مربعة كما يلي :

## النقل والتلطيح

مدن العجز مدن الفائض	1	2	3	4	5
A	12	10	15	22	18
B	10	18	25	15	16
C	11	10	3	8	5
D	6	14	10	13	13
E (وهمية)	0	0	0	0	0

لإيجاد التخصيص الأمثل للحفارات تتبع الخطوات التالية :

الخطوة ( 1 ) : (a) : نحدد أصغر عنصر مسافة ،  $u_i$  ، بكل صف من مصفوفة التخصيص كما يتضح فى المصفوفة (1) .

المصفوفة (1)

مدن العجز مدن الفائض	1	2	3	4	5	$u_i$
A	12	10	15	22	18	10
B	10	18	25	15	16	10
C	11	10	3	8	5	3
D	6	14	10	13	13	6
E (وهمية)	0	0	0	0	0	0

نطرح القيمة  $u_i$  من جميع عناصر الصف  $i$  ، حيث  $i = 1, 2, 3, 4, 5$  فنحصل على المصفوفة (2) .

(b) : نحدد أصغر عنصر مسافة ،  $v_j$  بكل عمود من أعمدة مصفوفة التخصيص (2) ، حيث  $j = 1, 2, 3, 4, 5$  كما يلي :

المصفوفة (2)

مدن العجز مدن الفائض	1	2	3	4	5
A	2	0	5	12	8
B	0	8	15	5	6
C	8	7	0	5	2
D	0	8	4	7	7
E	0	0	0	0	0
$v_j$	0	0	0	0	0

نطرح القيمة  $v_j$  من جميع عناصر العمود  $j$  ، حيث  $j = 1, 2, 3, 4, 5$  فنحصل على المصفوفة (3) ، حيث ستكون عناصرها هي نفس عناصر المصفوفة (2) لأنه تم طرح صفر من عناصر كل عمود .

المصفوفة (3)

مدن العجز مدن الفائض	1	2	3	4	5
A	2	0	5	12	8
B	0	8	15	5	6
C	8	7	0	5	2
D	0	8	4	7	7
E	0	0	0	0	0

الخطوة (2) : نغطي جميع الأصفار في مصفوفة مسافات التخصيص  
( 3 ) بالكل عند ممكن من خطوط التغطية الأفقية  
والرأسية كما هو مبين . وحيث أن عدد خطوط التغطية  
يساوي  $n_1 = 4$  ، وهو أصغر من  $( n = 5 )$  فلم  
نصل بعد إلى التخصيص الأمثل .

الخطوة (3) : نحدد أصغر عنصر غير مغطى بالمصفوفة ( 3 ) وهو  
4 ، ونطرحه من جميع عناصر المصفوفة غير المغطاة ،  
ونضيفه إلى عناصر تقاطع خطوط التغطية الأفقية والرأسية  
ونحصل على مصفوفة التخصيص ( 4 ) .

المصفوفة (4)

مدن العجز مدن الفائض	1	2	3	4	5
A	-2	0	1	8	4
B	0	8	11	1	2
C	12	11	0	5	2
D	0	8	0	3	3
E	-4	-4	0	0	0

نغطي جميع الأصفار في المصفوفة (4) بأقل عدد ممكن من الخطوط الأفقية والرأسية كما هو موضح ، وحيث أن عدد خطوط التغطية يساوي  $n_1 = 4$  ، وهو مازال أصغر من  $(n = 5)$  فلم نصل بعد إلى التخصيص الأمثل .

نحدد أصغر عنصر غير مغطى بالمصفوفة (4) وهو الواحد الصحيح ، ونطرحه من جميع عناصر المصفوفة غير المغطاة ، ونضيفه إلى عناصر تقاطع خطوط التغطية الأفقية والرأسية فنحصل على مصفوفة التخصيص (5) .

المصفوفة (5)

مدن العجز مدن الفائض	1	2	3	4	5
A	3	0	2	8	4
B	0	7	11	0	1
C	12	10	0	4	1
D	0	7	0	2	2
E	5	4	1	0	0

بتغطية جميع الأصفار في مصفوفة مسافات التخصيص بلاحظ

أن أقل عدد من خطوط التغطية الأفقية والرأسية يساوي  $n_1 = n = 5$  وبذلك نصل إلى التخصيص الأمثل .

الخطوة (4) : من مصفوفة التخصيص ( 5 ) يتم الحصول على التخصيص الأمثل باختيار خمسة عناصر صفيرية مستقلة على النحو التالي :

حيث أن الصف الأول يحتوى على عنصر صفري وحيد في الخلية (A, 2) فنضع  $x_{12} = 1$  ، أى نخصص حفار المدينة A للعمل بالمدينة 2 ، ونحذف جميع عناصر الصف الأول والعمود الثانى .

وحيث أن العمود الرابع يحتوى على عنصر صفري وحيد فى الخلية (E, 5) لذلك نضع  $x_{55} = 1$  بمعنى تخصيص حفار المدينة E

(الوهمية) للعمل بالمدينة 5 ثم نحذف جميع عناصر الصف الخامس والعمود الخامس .

بلاحظ بعد ذلك أن العمود الثالث يحتوى على عنصر صفرى وحيد فى الخلية (4, B) فنضع  $x_{24} = 1$  ، ويعنى ذلك تخصيص حفار المدينة B للعمل بالمدينة 4 ثم نحذف الصف الثانى والعمود الرابع .

وبلاحظ أيضا بعد هذا الحذف أن العمود الأول يحتوى على عنصر صفرى وحيد فى الخلية (1, D) فنضع  $x_{41} = 1$  ويعنى ذلك تخصيص حفار المدينة D للعمل بالمدينة 1 ، ونحذف الصف الرابع والعمود الأول . . . وأخيراً نضع  $x_{33} = 1$  بمعنى تخصيص حفار المدينة C للعمل بالمدينة 3 ، وتكون سياسة التخصيص المثلثى على النحو التالى :

يخصص حفار المدينة A للعمل بالمدينة 2  
يخصص حفار المدينة B للعمل بالمدينة 4  
يخصص حفار المدينة C للعمل بالمدينة 3  
يخصص حفار المدينة D للعمل بالمدينة 1  
يخصص حفار المدينة E (الوهمية) للعمل بالمدينة 5 ويعنى ذلك عدم تخصيص أى حفار للعمل بتلك المدينة .

وتكون أصغر مسافة إجمالية للتخصيص (بالكيلومتر) هى :

$$10 + 15 + 3 + 6 + 0 = 34 .$$



ثانيا : إذا كانت دالة الهدف في نموذج التخصيص في اتجاه الحد الأقصى

قد يحدث أن تكون عناصر مصفوفة التخصيص ،  $t_{ij}$  ،  
تعبّر عن الربح أو العائد أو المنفعة نتيجة تخصيص العامل ( أو  
الآلة )  $i$  لإنجاز العمل ( أو المهمة )  $j$  ويكون المطلوب في هذه  
الحالة هو إيجاد  $( i , j = 1, 2, \dots, n )$  ،  $x_{ij}$  التي تحقق الحد  
الأقصى للدالة :

$$Z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n t_{ij} x_{ij}$$

ولكى يتم حل نموذج التخصيص في هذه الحالة باستخدام  
الطريقة المجرية نتبع نفس الطريقة المتبعة في حل نموذج النقل في  
حالة تعظيم دالة الهدف كما يلي :

- يتم تحديد أكبر عنصر للربح أو للعائد ،  $t_{ij}$  ، في مصفوفة  
التخصيص ونرمز لهذا العنصر بالرمز  $\bar{t}$  .

تستبدل جميع عناصر مصفوفة التخصيص بعناصر جديدة هي

$t'_{ij}$  ، حيث :

$$t'_{ij} = \bar{t} - t_{ij} \quad ( i , j = 1, 2, 3, \dots, n )$$

- نقيس  $t'_{ij}$  التكاليف النسبية ، وبذلك فإن هدف إيجاد الحد الأقصى للربح

(أو العائد) أو  $( \text{Max} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n t_{ij} x_{ij} )$  سوف يتحول إلى هدف

إيجاد الحد الأدنى للانحرافات  $t'_{ij}$  أو  $( \text{Min} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n t'_{ij} x_{ij} )$  .

## النقل والتخصيص

- يتم استخدام الطريقة المجرية السابق عرضها في إيجاد التخصيص الأمثل للانحرافات  $t'_{ij}$

- يتم استخدام عناصر الربح  $t_{ij}$  الأصلية عند تحديد قيمة التخصيص الأمثل للنموذج .

### مثال (٥) :

شركة صناعية لديها أربعة مديرين للتسويق هم : A, B, C, D ولديها أربعة فروع للبيع في أربعة مدن يرمز لهذه الفروع بالرموز  $D_1, D_2, D_3, D_4$  ، وبعد دراسة كفاءة كل مدير تسويق من المديرين وطبيعة احتياجات كل مدينة من المدن الأربعة وجد أن العائد اليومي (بالآلف جنيه) لكل مدير تسويق في كل فرع من فروع البيع موضحا بالمصفوفة التالية :

الفرع \ المدير	$D_1$	$D_2$	$D_3$	$D_4$
A	16	10	14	11
B	14	11	15	13
C	15	15	13	12
D	14	11	12	13

المطلوب : إيجاد التخصيص الأمثل لمديري التسويق لفروع البيع المختلفة الذي يحقق أكبر عائد ممكن للشركة .

الحل :

حيث أن عناصر مصفوفة التخصيص تعبر عن العائد المتحقق من عملية التخصيص ، لذلك يتم طرح عناصر مصفوفة التخصيص من أكبر عنصر للعائد بالمصفوفة وهو القيمة 16 فنحصل على مصفوفة الانحرافات عن أكبر قيمة للعائد وهي ما أطلقنا عليها التكاليف النسبية ، ويصبح الهدف حينئذ استخدام الطريقة المجرية لإيجاد الحد الأدنى لمصفوفة التخصيص التالية :

الفرع المدير	D <sub>1</sub>	D <sub>2</sub>	D <sub>3</sub>	D <sub>4</sub>
A	0	6	2	5
B	2	5	1	3
C	1	1	3	4
D	2	5	4	3

الخطوة 1 : (a) : نحدد أصغر عنصر تكلفة ،  $u_i$  ، بكل صف من مصفوفة التخصيص كما يتضح فى المصفوفة (1) .

مصفوفة (1)

الفروع المدير	D <sub>1</sub>	D <sub>2</sub>	D <sub>3</sub>	D <sub>4</sub>	u <sub>i</sub>
A	0	6	2	5	0
B	2	5	1	3	1
C	1	1	3	4	1
D	2	5	4	3	2

نطرح القيمة  $u_i$  من جميع عناصر الصف  $i$ ، حيث  $i = 1, 2, 3, 4$   
 فنحصل على مصفوفة التخصيص (2)، ونحدد بها أصغر عنصر تكلفة بكل  
 عمود ( $j = 1, 2, 3, 4$ )،  $v_j$  كما يلي :

مصفوفة (2)

الفروع المدير	D <sub>1</sub>	D <sub>2</sub>	D <sub>3</sub>	D <sub>4</sub>
A	0	6	2	5
B	1	4	0	2
C	0	0	2	3
D	0	3	2	1
$v_j$	0	0	0	1

ب طرح للقيمة  $v_j$  من جميع عناصر العمود  $j$  ، حيث  $j = 1, 2, 3, 4$  ،  
ف نحصل على مصفوفة التخصيص ( 3 ) التالية :

مصفوفة (3)

المدير \ الفرع		الفرع			
		$D_1$	$D_2$	$D_3$	$D_4$
A		0	6	2	4
B		1	4	0	1
C		0	0	2	2
D		0	3	2	0

الخطوة (2) : نغطي جميع الأصفار في مصفوفة تكاليف التخصيص السابقة بأقل عدد ممكن من خطوط التغطية الأفقية والرأسية كما هو مبين ، وحيث أن عدد خطوط التغطية هو :  $n_1 = n = 4$  ، نكون بذلك قد وصلنا إلى التخصيص الأمثل والذي يتحدد من خلال الخطوة التالية .

الخطوة (3) : الصف الأول من المصفوفة يحتوي على عنصر صفري وحيد في الخلية  $(A, D_1)$  لذلك نضع  $x_{11} = 1$  ، أي نخصص مدير التسويق A للعمل بالفرع  $D_1$  ، ثم نشطب باقي عناصر الصف الأول والعمود الأول .

كما أن الصف الثاني من المصفوفة يحتوي على عنصر صفري وحيد في الخلية  $(B, D_3)$  فنضع  $x_{23} = 1$  ، ويعنى ذلك تخصيص مدير التسويق B للعمل بالفرع  $D_3$  ، ويتم شطب الصف الثاني والعمود الثالث .

بعد هذا الشطب نلاحظ أن الصف الثالث من المصفوفة أصبح يحتوي على عنصر صفري واحد في الخلية  $(C, D_2)$  ، فنضع  $x_{32} = 1$  ، ويعنى ذلك تخصيص مدير التسويق C للعمل بالفرع  $D_2$  ، ثم يشطب الصف الثالث والعمود الثاني ، وأخيراً نضع  $x_{44} = 1$  ، بمعنى تخصيص مدير التسويق D للعمل بالفرع  $D_4$  .

وتكون سياسة التخصيص المثلى كما يلى :

يخصص مدير التسويق A للفرع  $D_1$

يخصص مدير التسويق B للفرع  $D_3$

يخصص مدير التسويق C للفرع  $D_2$

يخصص مدير التسويق D للفرع  $D_4$

وأقصى ربح يتحقق ( بالآلف جنيه ) فى اليوم للشركة هو :

$$16 + 15 + 15 + 13 = 59$$

ثالثاً : وجود بعض القيود المفروضة على نموذج التخصيص

قد يحدث فى بعض الأحيان - نظراً لاعتبارات فنية أو سياسية

أو قانونية معينة - أنه لا يمكن تخصيص شخص ( أو آلة ) معين i

لأداء وظيفة ( أو مهمة ) معينة z .

## النقل والتلطيح

ويمكن التغلب على هذه المشكلة بأن نضع تكلفة تخصيص لانهائية في الخلية الواقعة عند تلاقي الصف  $i$  مع العمود  $j$  ، أى نضع  $t_{ij} = \infty$  ، وبذلك نضمن ألا يتم تخصيص الشخص (أو الآلة)  $i$  في الوظيفة (أو المهمة)  $j$  على الإطلاق فنى التخصيص الأمثل للنموذج.

### مثال (٦) :

مؤسسة دار الهلال للطبع والنشر استوردت أربع آلات طباعة هى :  $M_1, M_2, M_3, M_4$  ، تود تركيبها فى خمسة عنابر يرمز لها بالرموز  $A, B, C, D, E$  . ونظراً لاعتبار أحجام العنابر ، وجد أنه لا يمكن تركيب الآلة  $M_2$  فى العنبر  $C$  ، كما لا يمكن تركيب الآلة  $M_3$  فى العنبر  $A$  . فإذا كانت تكلفة تركيب كل آلة فى كل عنبر (بالألف جنيه) موضحة بالمصفوفة التالية :

العنبر الآلة	A	B	C	D	E
$M_1$	4	6	10	5	6
$M_2$	7	4	-	5	4
$M_3$	-	6	9	6	2
$M_4$	9	3	7	2	3

المطلوب : إيجاد التخصيص الأمثل لآلات الطباعة على العنابر .

الحل :

يلاحظ أن مصفوفة تكاليف التخصيص غير مربعة ، حيث يوجد أربع آلات طباعة ( أى مصادر ) وخمسة عناصر ( أى جهات استخدام ) ، لذلك تضاف آلة طباعة وهمية ويرمز لها بالرمز  $M_5$  بعناصر تكلفة صفرية وبما أنه لا يمكن تركيب الآلة  $M_2$  فى العنبر C ، والآلة  $M_3$  فى العنبر A فنضع تكلفة تركيب لانهائية فى الخليتين  $(M_2, C)$  ،  $(M_3, A)$  ، أى نضع

$$t_{23} = \infty$$

$$t_{31} = \infty$$

وتكون مصفوفة تكاليف التخصيص كما يلى :

العنبر الآلة	A	B	C	D	E
$M_1$	4	6	10	5	6
$M_2$	7	4	$\infty$	5	4
$M_3$	$\infty$	6	9	6	2
$M_4$	9	3	7	2	3
$M_5$ (وهمية)	0	0	0	0	0



### النقل والتخصيص

بتطبيق خطوات الحل وفقاً للطريقة المجرية - كما سبق عرضها في الأمثلة السابقة - نجد أن مصفوفة التخصيص الأمثل سوف تأخذ الصورة التالية :

العنبر الآلة	A	B	C	D	E
M <sub>1</sub>	0	6	6	1	2
M <sub>2</sub>	3	0	∞	1	0
M <sub>3</sub>	∞	4	7	4	0
M <sub>4</sub>	7	1	5	0	1
M <sub>5</sub> (وهمية)	0	0	0	0	0

ويكون التخصيص الأمثل للنموذج على النحو التالي :

تخصيص الآلة M<sub>1</sub> للعنبر A

تخصيص الآلة M<sub>2</sub> للعنبر B

تخصيص الآلة M<sub>3</sub> للعنبر E

تخصيص الآلة M<sub>4</sub> للعنبر D

تخصيص الآلة M<sub>5</sub> للعنبر C ويعنى ذلك أن العنبر C سيظل شاغراً

وتكون تكلفة التخصيص الإجمالية في النموذج ( بالآلاف جنيه ) هي :

$$4 + 4 + 2 + 2 + 0 = 12$$



## الباب الرابع

---

### نظرية المباريات

◎ مقدمة

◎ المباريات ثنائية الأطراف صفرية المجموع

◀ الإستراتيجيات البسيطة المثلى ونقطة التوازن

◀ طريقة السيطرة والتسيد

◀ الإستراتيجيات المختلطة



## الباب الرابع نظرية المباريات Theory of Games

### (١-٤) مقدمة

تاريخياً نشأت نظرية المباريات في العشرينات من القرن المنصرم ، إلا أن تطبيق نظرية المباريات على نطاق واسع بدأ منذ عام ١٩٤٤ عندما نشر كل من فون نيومان ومورجنسترن مؤلفهما الشهير عن نظرية المباريات والسلوك الاقتصادي " Theory of Games and Economic Behaviour " .

وتهتم نظرية المباريات بدراسة المواقف أو الأعمال التي تتضمن المنافسة والصراع وتضارب المصالح ، حيث نجد في مثل هذه الحالات أن مصالح الخصوم تكون غير متطابقة بل وتصل أحياناً إلى درجة التناقض والصراع ، أضف إلى ذلك ، أن كل طرف في المباراة يمكن أن يؤثر على مجرى الأحداث في هذه المباراة ، ولكنه لا يستطيع أن يكون سيد الموقف بصورة مستمرة وكاملة .

وبالرغم من أن لفظ " المباراة " ينسحب على المباريات الرياضية المختلفة والعلاب الشطرنج والكونشمينة والدومينو وغيرها . إلا أن هناك تشابه كبير بين سلوك أطراف مثل هذه المباريات وبين سلوك المتنافسين في سوق معين أو سلوك المتحاربين لاحتلال موقع معين . هذا الشبه أدى إلى تعميم لفظ المباراة بحيث يشمل المواقف الاقتصادية والعسكرية والسياسية وغيرها التي تتضمن تناقض أو تعارض المصالح .

وقد بدأ استخدام نظرية المباريات في التعامل مع التطبيقات الاقتصادية ثم تم تطويعها لتطبيقات عسكرية أثناء الحرب العالمية الثانية ، ثم شاع استخدام نظرية المباريات ، مؤخراً ، في مجالات العلوم الاجتماعية والسياسية . ونظرية المباريات هي مجمل الطرق الرياضية التي تناقش وتحلل هذه المواقف .

وتستخدم نظرية المباريات بعض المصطلحات الفنية سوف نعرضها بإيجاز فيما يلي :

١ - اللاعب : يدل على وحدة اتخاذ القرار ، وقد تكون هذه الوحدة فرد أو شركة أو دولة . . . الخ .

٢ - اللعبة والمباراة : اللعبة هي مجموعة قواعد تحدد ما يجب أو ما يستطيع أن يفعله اللاعب فهي تتكون من سلسلة من الخطوات . أما المباراة فهي تطبيق خاص لقواعد اللعبة يؤدي إلى نتيجة معينة ، وهي بذلك تتكون من سلسلة من الاختيارات .

٣ - الإستراتيجية : هي جملة القواعد التي تحدد اختيار اللاعب في كل خطوة في اللعبة ، وكل إستراتيجية من الإستراتيجيات المحددة التي يمكن أن يختارها اللاعب تسمى بالإستراتيجية الصرفة أو البسيطة Pure Strategy . أما إذا اختار اللاعب كل أو بعض من مجموعة الإستراتيجيات البسيطة المتاحة أمامه كل منها يتم اختيارها باحتمال معين ، فيقال في هذه الحالة أنه يستخدم ما يسمى بالإستراتيجيات المختلطة Mixed Strategy .

والمواقف المتنافسة تسمى بالمباريات إذا اتصفت بالخصائص التالية :

١ - يوجد عدد محدد من الأطراف (اللاعبين)  $t$  ، حيث :  $t \geq 2$  . فإذا كانت  $t = 2$  فتكون المباراة ثنائية الأطراف ، أما إذا كانت  $t > 2$  تسمى المباراة متعددة الأطراف .

٢ - كل طرف من أطراف الصراع يملك عدداً محدداً من الإستراتيجيات المتاحة أمامه .

٣ - كل طرف من الطرفين يعرف تماماً الإستراتيجيات أو البدائل المتاحة للطرف الآخر ولكنه لا يعرف أي من هذه الإستراتيجيات أو البدائل سوف يختار .

٤ - اهتمامات كل من الطرفين متعاكسة أو متضادة في طبيعتها .

٥ - اختيارات كل من الطرفين يفترض أنها تتم في وقت واحد ، وبالتالي فإن أي من الطرفين لا يعرف ما سيختاره الطرف الآخر حتى يقرر ما سيختاره هو .

٦ - محصلة الإستراتيجيات التي يتم اختيارها سوف يعطي عائد المباراة والذي يمكن أن يكون موجبا أو صفرا أو سالبا . ويلاحظ أنه إذا كان العائد سالب القيمة فيعني ذلك خسارة للاعب ، وبالتالي فيبعد لعب كل مباراة فإن اللاعب الخاسر سوف يدفع للاعب الكاسب قيمة أو عائد المباراة .

#### (٢-٤) المباريات ثنائية الأطراف صفرية المجموع

##### Two-Person, Zero-sum Game

عندما تتألف المباراة من طرفين أو خصمين فقط (فردين أو مؤسستين أو دولتين ... الخ) فإنها تسمى مباراة ثنائية الأطراف . وإذا كان ربح الطرف الأول في المباراة يساوي تماماً خسارة الطرف الثاني ، ومن ثم فإن صافي الأرباح (أو الخسائر) يساوي الصفر ، فيقال عن المباراة بأنها ذات مجموع صفري .

أما في حالة وجود  $t$  من الأطراف أو الخصوم وكان صافي الأرباح (أو الخسائر) يساوي صفراً ، فيقال عن المباراة بأنها متعددة الأطراف صفرية المجموع t-Person, Zero-sum Game . وسوف يكون الاهتمام في هذا الجزء منصّباً على المباريات ثنائية الأطراف صفرية المجموع .

#### (١-٢-٤) الإستراتيجيات البسيطة المثلى ونقطة التوازن

#### Optimum Simple Strategies and Saddle Point

نفرض أن هناك مباراة تتضمن طرفين وذات مجموع صفري ، وبفرض أن الطرف الأول لديه  $m$  إستراتيجية والطرف الثاني لديه  $n$  إستراتيجية ، ولنفرض أيضاً أنه إذا اختار الطرف الأول الإستراتيجية  $i$  ، ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) واختار الطرف الثاني الإستراتيجية  $j$  ، ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) فإن ربح الطرف الأول (وبالتالي خسارة الطرف الثاني) يساوي  $a_{ij}$  ، وتكون مصفوفة العائد لهذه المباراة والتي يرمز لها بالرمز  $[a]$  على الصورة التالية :

الطرف الثاني الطرف الأول	1	2	3	...	n
1	$a_{11}$	$a_{12}$	$a_{13}$	...	$a_{1n}$
2	$a_{21}$	$a_{22}$	$a_{23}$	...	$a_{2n}$
3	$a_{31}$	$a_{32}$	$a_{33}$	...	$a_{3n}$
⋮	⋮	⋮	⋮		⋮
m	$a_{m1}$	$a_{m2}$	$a_{m3}$	...	$a_{mn}$

$[a] =$



فإذا فرضنا أنه من الأفضل أن يختار اللاعب الأول الإستراتيجية  $i'$  ويختار اللاعب الثاني الإستراتيجية  $j'$  ، ففي هذه الحالة فإن عائد اللاعب الأول يساوي  $(a_{i'j'})$  بينما عائد اللاعب الثاني يساوي  $(-a_{i'j'})$  . وإذا اختار اللاعب الأول الإستراتيجية  $i'$  وابتعد اللاعب الثاني عن الإستراتيجية  $j'$  فإن ربح اللاعب الأول سيكون حتماً أكبر من القيمة  $a_{i'j'}$  ، لذلك فإن اللاعب الثاني سيصر على اختيار الإستراتيجية  $j'$  لمنع اللاعب الأول من تحقيق عائد أكبر من  $a_{i'j'}$  ، ومن ثم فإن :

$$a_{i'j'} \leq a_{i'j} \leq a_{ij} \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, m \\ j = 1, 2, \dots, n \end{matrix} \quad (4-1)$$

وتعني المتباينة السابقة أن اختيار اللاعب الأول للإستراتيجية  $i'$  سوف يضمن له عائد يساوي على الأقل القيمة  $a_{i'j'}$  ، وأن اختيار اللاعب الثاني للإستراتيجية  $j'$  سوف يضمن له أن اللاعب الأول لن يحصل على عائد أكبر من القيمة  $a_{i'j'}$  . وفي هذه الحالة فإن الإستراتيجيتين المثليتين هما :  $i'$  ،  $j'$  ، والنقطة التي تتقاطعان فيها هي النقطة  $(i', j')$  تسمى بنقطة التوازن أو نقطة الإستقرار أو نقطة الركاب Saddle Point لمصفوفة العائد  $[a]$  . وتسمى القيمة  $V = a_{i'j'}$  بالقيمة المثلى للمباراة .

وفي كثير من الحالات فإن مصفوفة العائد تتضمن عدة نقاط للتوازن تحدد جميعها دائماً قيمة وحيدة للمباراة . ويلاحظ هنا أنه إذا اختار اللاعب الأول الإستراتيجية  $i'$  فإنه يضمن الحصول على الأقل على القيمة  $V$  بصرف النظر عن اختيار اللاعب الثاني ، وإذا اختار اللاعب الثاني الإستراتيجية  $j'$  فإنه يضمن بذلك أن اللاعب الأول سوف لا يحصل على أكثر من القيمة  $V$  . وكذلك إذا اختار اللاعب الأول الإستراتيجية  $i'$  فإن اللاعب

الثاني لا يستطيع أن يستفيد من ذلك ويخفض عائد اللاعب الأول ، وإذا اختار اللاعب الثاني الإستراتيجية ' ز فإن اللاعب الأول لا يستطيع أن يستفيد من ذلك ويزيد عائده .

وبصفة عامة يمكن القول ، إذا اختار اللاعب الأول الإستراتيجية i فإنه يضمن حصوله على الأقل على القيمة :

$$\min_j a_{ij}$$

وحيث أنه حر في اختيار الإستراتيجية i فإنه يختار الإستراتيجية التي تضمن له أن يحصل على الأقل على القيمة :

$$\max_i \min_j a_{ij}$$

بالمثل ، فإن اللاعب الثاني باختياره الإستراتيجية ز يتوقع أن يحصل على القيمة :

$$\max_j \min_i (-a_{ij})$$

وحيث أن :

$$\max_j \min_i (-a_{ij}) = \max_j - (\max_i a_{ij}) = - \min_j \max_i a_{ij}$$

فإن اللاعب الثاني يضمن أن يحصل على الأقل على القيمة :

$$- \min_j \max_i a_{ij}$$

أي أن اللاعب الأول سوف يحصل في هذه الحالة على الأكثر على القيمة :

$$\min_j \max_i a_{ij}$$

ونذكرنا أنفاً أن اللاعب الأول يضمن أن يحصل على الأقل على القيمة :

$$\max_i \min_j a_{ij}$$

ويلاحظ في هذه الحالة أن اللاعب الأول اعتمد على معيار أكبر القيم الصغرى Maximin Criterion في اختيار الإستراتيجية البسيطة ، أو بمعنى آخر يقال أنه اختار إستراتيجية أكبر القيم الصغرى Maximin Strategy . أما اللاعب الثاني فإنه يستطيع أن يمنع اللاعب الأول من الحصول على أكثر من القيمة :

$$\min_j \max_i a_{ij}$$

فيقال في هذه الحالة أن اللاعب الثاني اعتمد على معيار أصغر القيم العظمى Minimax Criterion في اختيار إستراتيجيته البسيطة ، أو يقال أنه اختار إستراتيجية أصغر القيم العظمى Minimax Strategy .

وعلى ذلك فإنه بالنسبة لمجموعة الإستراتيجيات المتاحة لكل لاعب يكون لدينا المعيارين التاليين :

$$\maximin [a_{ij}] = \max_i \min_j a_{ij}$$

$$\minimax [a_{ij}] = \min_j \max_i a_{ij}$$

وبصفة عامة يلاحظ أن :

$$\max_i \min_j a_{ij} \leq \min_j \max_i a_{ij} \quad (4-2)$$

أما إذا كان :

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} = V \quad (4-3)$$

فإن اللاعب الأول يمكن أن يختار إستراتيجية تمكنه من أن يحصل على الأقل على القيمة  $V$  ، وإن اللاعب الثاني يمكن أن يختار إستراتيجية تضمن له أن اللاعب الأول سوف لا يحصل على أكثر من القيمة  $V$  . وفي هذه الحالة فإنه توجد إستراتيجيات  $i'$  ,  $j'$  للاعبين تحقق المتباينة (4-1) .

وإذا تحقق الشرط (4-3) فإن مصفوفة العائد  $[a]$  يكون لها نقطة توازن عند  $i'$  ,  $j'$  وتكون قيمة المباراة هي :  $V = a_{i'j'}$  .

وعلى ذلك فإن الشرط (4-3) يتحقق إذا كان هناك زوج من الإستراتيجيات  $i'$  ,  $j'$  التي تحقق الشرط (4-1) ، ومن الشرط (4-1) يلاحظ أيضا أن :

$$\max_i a_{ij} = \min_j a_{ij} = V$$

وهذا يعني أن الشرط الضروري والكافي لكي يكون للمباراة نقطة توازن هو وجود عنصر في مصفوفة العائد يمثل في نفس الوقت أصغر قيمة في الصف وأكبر قيمة في العمود ، ويكون حل هذه المباراة هو حل ثابت ومستقر Solution Stable ويطلق عليه أيضا " الحل التوازني " Equilibrium Solution .

أما إذا كان هناك مباراة لا يتحقق فيها الشرط (4-3) فنجد فيها بصفة عامة أن :

$$\max_i \min_j a_{ij} < \min_j \max_i a_{ij}$$

فيعني ذلك أن هذه المباراة ليس لها نقطة توازن ، وفي هذه الحالة فإن من مصلحة كل لاعب أن يستخدم ما يسمى بالإستراتيجية المختلطة وهي عبارة عن التوزيع الاحتمالي الذي يحدد احتمالات معينة لاختيار كل من الإستراتيجيات البسيطة .

## مثل (١) :

بفرض أن هناك موقفاً تنافسياً بين شركتين للمقاولات : شركة (A) وشركة (B) بشأن الإستراتيجيات المتعلقة بتعظيم نصيب كل منهما من العمالة الفنية المدربة . وسنفترض أن الحجم الكلي للعمالة الفنية المدربة في السوق المحلي ثابت ، ومن ثم فإن إحدى الشركتين لن تزيد من نصيبها من العمالة الفنية المدربة إلا على حساب الإقتطاع من نصيب الشركة الأخرى المنافسة لها . وبفرض أن كل شركة لديها ثلاث إستراتيجيات لاجتذاب عدد أكبر من العمالة الفنية المدربة هي :  $a_1, a_2, a_3$  للشركة A ،  $b_1, b_2, b_3$  للشركة B وأن النسب المئوية للعائد المتوقع لكل توليفة من إستراتيجيات الشركتين موضحة في مصفوفة العائد التالية :

الشركة B		$b_1$	$b_2$	$b_3$
الشركة A	$a_1$	12	- 4	11
	$a_2$	0	1	- 10
	$a_3$	7	3	13

## المطلوب :

إيجاد الإستراتيجية المثلى لكل شركة من الشركتين المتنافستين ، وتحديد قيمة المباراة المثلى في هذه الحالة .

## الحل :

باتباع معيار أكبر القيم الصغرى بالنسبة للشركة A ( أي بالنسبة لصغرى المصفوفة ) ومعيار أصغر القيم العظمى بالنسبة للشركة B ( أي بالنسبة لأعمدة المصفوفة ) يلاحظ أن :

الشركة B

		$b_1$	$b_2$	$b_3$	أصغر قيمة في الصف
	$a_1$	12	- 4	11	- 4
الشركة A	$a_2$	0	1	- 10	- 10
	$a_3$	7	3	13	<b>3</b>
	أكبر قيمة في العمود	12	<b>3</b>	13	

بخصوص إستراتيجيات الشركة A ( أي صفوف المصفوفة ) فإن أكبر القيم الصغرى (Maximin) يساوي 3 ، أما بخصوص إستراتيجيات المصفوفة B ( أي أعمدة المصفوفة ) فإن أصغر القيم العظمى (Minimax) تساوي 3 ، أي أن :

$$\text{أكبر القيم الصغرى} = \text{أصغر القيم العظمى} = 3$$

فإن المباراة لها نقطة توازن ( أي نقطة ركاب ) وهي النقطة  $(a_3, b_2)$  ويكون حلها ثابت ومستقر ، وتكون السياسة المثلى لكل من الشركتين هي : يتعين على الشركة A اختيار الإستراتيجية  $a_3$  ، في حين يتعين على الشركة B أن تختار الإستراتيجية  $b_2$  وتكون القيمة المثلى للمباراة هي 3% ، وحيث أن قيمة المباراة موجبة فيعني ذلك أن الشركة A سوف تكسب 3% بينما الشركة B سوف تخسر نفس القيمة أي 3% من العمالة الفنية المدربة .

مثال (٢) :

بفرض أن مصفوفة العائد بين الشركتين المتنافستين A ، B تأخذ الصورة التالية :

## الشركة B

		$b_1$	$b_2$	$b_3$
الشركة A	$a_1$	20	8	- 6
	$a_2$	12	10	2
	$a_3$	3	5	6

المطلوب :

إيجاد الإستراتيجية المثلى لكل شركة من الشركتين .

الحل :

باتباع معياري أكبر القيم الصغرى بالنسبة للشركة A وأصغر القيم العظمى بالنسبة للشركة B يلاحظ أن :

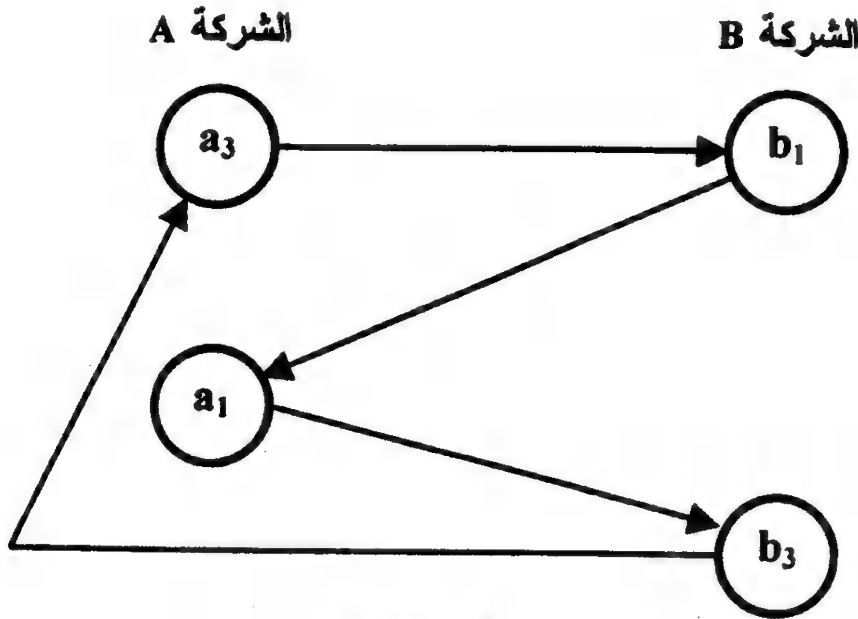
## الشركة B

		$b_1$	$b_2$	$b_3$	أصغر قيمة في الصف
الشركة A	$a_1$	20	8	- 6	- 6
	$a_2$	12	10	2	2
	$a_3$	3	5	6	<span style="border: 1px solid black;">3</span>
أكبر قيمة في العمود		20	10	<span style="border: 1px solid black;">6</span>	

بالنسبة للإستراتيجيات المتاحة للشركة A ( أي صفوف المصفوفة ) يلاحظ أن أكبر القيم الصغرى ( Maximin ) تساوي 3 ، أما بخصوص الإستراتيجيات المتاحة للشركة B ( أي أعمدة المصفوفة ) فإن أصغر القيم العظمى ( Minimax ) يساوي 6 ، أي أن :

أكبر القيم الصغرى  $\neq$  أصغر القيم العظمى

فتكون المباراة غير مستقرة وليس لها نقطة توازن ، ويتضح ذلك في أنه إذا اختارت الشركة A الإستراتيجية الثالثة ( أي  $a_3$  ) مثلاً ، فإن الشركة B سوف ترد عليها باختيار الإستراتيجية الأولى ( أي  $b_1$  ) لتقليل العائد الذي تحصل عليه الشركة A إلى 3 فقط . وفي حالة اختيار الشركة B للإستراتيجية  $b_1$  فإن هذا بدوره يدفع الشركة A إلى اختيار الإستراتيجية  $a_1$  ، هذا الاختيار من جانب الشركة A للإستراتيجية  $a_1$  سوف يجعل الشركة B تسعى لاختيار الإستراتيجية  $b_3$  موقعة بالشركة A خسارة قدرها 6 ، وفي حالة اختيار الشركة B الإستراتيجية  $b_3$  سوف يدفع الشركة A إلى اختيار الإستراتيجية  $a_3$  حتى تتجنب الخسارة وتحقق عائد قدره 6 . وهكذا نكون قد درنا دورة كاملة حتى نعود للمربع رقم [1] ، وأن أي حل آخر لهذه المباراة سوف يدور في دوائر متكررة غير منتهية كما يتضح ذلك من الشكل (١-٤) .



شكل (١-٤)



## (٢-٢-٤) طريقة السيطرة والتسيد Dominance Method

بعض المباريات تكون غير مستقرة ولا يكون لها بالطبع نقطة توازن ، يمكن حلها بالتطبيق المتتالي لقاعدة السيطرة أو التسيد . هذه القاعدة تعني الاستبعاد المتتالي للإستراتيجيات المتتحية أو المحكومة والإبقاء على الإستراتيجية أو الإستراتيجيات الحاكمة أو المسيطرة .

ويقال عن إستراتيجية لاعب أنها متتحية أو محكومة بإستراتيجية أخرى سائدة أو مهيمنة إذا كانت الإستراتيجية المتتحية أو المحكومة تحقق عائداً مساوياً على الأكثر لما تحققه الإستراتيجية السائدة أو المسيطرة أو تقل عنها في قيمة واحدة على الأقل ، بحيث لا يقدم لاعب عاقل رشيد على اختيار الإستراتيجية المتتحية أبداً ، أي بغض النظر عما يختاره اللاعب الآخر .

والعكس ، يقال عن إستراتيجية لاعب أنها تحكم ( أو تسيطر على ) إستراتيجية أخرى إذا كانت هذه الإستراتيجية تحقق عائداً مساوياً على الأقل لما تحققه الإستراتيجية المتتحية وتتفوق عليها في قيمة واحدة على الأقل .

ويعني هذا أن اللاعب العاقل الرشيد لن يختار إستراتيجية متتحية مع وجود إستراتيجية أخرى تحكمها وتسيطر عليها ، لذلك فمن المنطقي أن يتم حذف الإستراتيجيات المتتحية سواء على مستوى الصفوف و/ أو الأعمدة بمصفوفة العائد .

ولتوضيح كيفية تطبيق هذه الطريقة دعنا نأخذ المثال التالي :

مثال (٣) :

نفرض أن هناك لاعبين متنافسين هما : اللاعب A واللاعب B وكان اللاعب A أمامه ثلاث إستراتيجيات يمكنه أن يختار من بينها يرمز لها بالرموز a , b , c . بالمثل فإن اللاعب B متاح لديه ثلاث إستراتيجيات يمكنه

أن يختار من بينها يرمز لها بالرموز  $f, e, d$ ، بحيث إذا اختار اللاعب A الإستراتيجية a واختار اللاعب B الإستراتيجية d فلن يكسب أي منهما، أما إذا اختار اللاعب A الإستراتيجية a بينما اختار اللاعب B الإستراتيجية e فإن اللاعب A سوف يخسر 2 أو أن اللاعب B سوف يكسب 2، وهكذا كما يتضح من مصفوفة العائد التالية:

		اللاعب B		
		d	e	f
اللاعب A	a	0	-2	7
	b	2	5	6
	c	3	-3	8

المطلوب :

إيجاد الإستراتيجية المثلى لكل لاعب وتحديد قيمة المباراة .

الحل :

بتطبيق معيار أكبر القيم الصغرى بالنسبة للاعب A ( صفوف المصفوفة ) ومعيار أصغر القيم العظمى بالنسبة للاعب B ( أعمدة المصفوفة )، يلاحظ ما يلي :

		اللاعب B			أصغر قيمة في الصف
		d	E	F	
اللاعب A	a	0	-2	7	-2
	b	2	5	6	<span style="border: 1px solid black;">2</span>
	c	3	-3	8	-3
أكبر قيمة في العمود		<span style="border: 1px solid black;">3</span>	5	8	

بالنسبة للاعب A : أكبر القيم الصغرى يساوي 2

بالنسبة للاعب B : أصغر القيم العظمى يساوي 3

وكما هو واضح فإن أكبر القيم الصغرى لا يساوي أصغر القيم العظمى فتكون المباراة غير مستقرة ليس لها نقطة توازن .

بالبحث في إمكانية تطبيق قاعدة السيطرة أو التحكم ( إن أمكن - لأن هذه الطريقة لا تصلح في كل الحالات على الإطلاق ) والتي تتلخص رياضياً في الآتي : إذا كانت كل عناصر أحد الصفوف في مصفوفة العائد أقل من أو تساوي العناصر المناظرة لها في صف آخر ، فيكون هذا الصف متتحي ويتم حذفه . وإذا كانت كل عناصر أحد الأعمدة في مصفوفة العائد أكبر من أو تساوي العناصر المناظرة لها في عمود آخر ، فيكون هذا العمود متتحي ويتم حذفه .

بالنظر إلى مصفوفة العائد في هذا المثال ، يلاحظ أنه بالنسبة للاعب A لا يوجد صف عناصره أصغر من أو تساوي العناصر المناظرة لها في صف آخر ويعني هذا أنه لا توجد إستراتيجية متتحية للاعب A . أما بخصوص اللاعب B فنجد أن عناصر العمود الثالث أكبر من العناصر المناظرة لها في العمود الثاني ، فيعني ذلك أن الإستراتيجية f تعد إستراتيجية متتحية والإستراتيجية e تسيطر عليها ، لذلك يتم حذف الإستراتيجية f . ولعل السبب في ذلك هو افتراض أن اللاعب B عاقل ورشيد ولن يختار هذه الإستراتيجية أبداً ، بغض النظر عما يختاره اللاعب A . وتصبح مصفوفة العائد من الترتيب  $(2 \times 3)$  أي مكونة من ثلاثة صفوف ( إستراتيجيات اللاعب A ) وعمودين ( إستراتيجيات اللاعب B ) كالآتي :

		اللاعب B	
		d	e
اللاعب A	a	0	-2
	b	2	5
	c	3	-3

بالنظر إلى صفوف تلك المصفوفة يلاحظ أن عناصر الصف الأول أقل من العناصر المناظرة لها بالصف الثاني ، فتكون الإستراتيجية a متفحفة والإستراتيجية b مهيمنة عليها ، لذلك يتم حذف الإستراتيجية a لنفس السبب ، حيث أن اللاعب A عاقل ورشيد ولن يختار الإستراتيجية a بغض النظر عما يختاره اللاعب B . ويتم اختزال مصفوفة العائد لتصبح من الترتيب  $(2 \times 2)$  كالآتي :

		اللاعب B	
		d	e
اللاعب A	b	2	5
	c	3	-3

في المصفوفة السابقة لا يوجد صف كل عناصره أصغر من أو تساوي العناصر المناظرة لها في الصف الآخر ، وفي نفس الوقت لا يوجد عمود كل عناصره أكبر من أو تساوي العناصر المناظرة لها في العمود الآخر ، وبالتالي لا توجد إستراتيجية متفحفة من بين الإستراتيجيات b , c , d , e . ولا يمكن بالتالي اختزال المصفوفة المتبقية .

وكما هو واضح فإن مصفوفة العائد الناتجة ليس لها نقطة توازن وسوف يتم حلها بسهولة وفقاً لطريقة الإستراتيجيات المختلطة كما سنرى فيما بعد .  
والمكسب الذي تحقق من تطبيق قاعدة السيطرة والتحكم هو تخفيض حجم مصفوفة العائد من الترتيب  $(3 \times 3)$  إلى الترتيب  $(2 \times 2)$  ، ولا شك أن هذا التخفيض سوف يحقق وفراً كبيراً في العمليات الحسابية المطلوبة للوصول إلى الحل الأمثل للنموذج وفقاً لطريقة الإستراتيجيات المختلطة كما سيتضح في الجزء التالي .

#### (٢-٢-٤) الإستراتيجيات المختلطة Mixed Strategies

إذا كان هناك مباراة ليس لها نقطة توازن يمكن التوصل إليها باستخدام معياري أكبر القيم الصفري وأصغر القيم العظمى ، وفي نفس الوقت لا توجد في هذه المباراة إستراتيجية ( أو إستراتيجيات ) محكومة أو متحيزة بإستراتيجية ( أو إستراتيجيات ) أخرى مهيمنة ، ومن ثم لا يمكن تخفيض حجم مصفوفة العائد .

في هذه الحالة لن يكون ملائماً لطرفي المباراة اختيار إستراتيجية وحيدة دائماً في لعب هذه المباراة وإنما ينتقي من الإستراتيجيات المتاحة أمامه بشكل عشوائي إستراتيجية ما بحيث يضع خصمه في حالة عدم تأكد والذي لا يستطيع بالتالي أن يبنى إستراتيجيته على معرفته أو تخمينه لإختيار خصمه لإستراتيجية بعينها . هذه الخطة البديلة في لعب المباريات التي ليس لها نقطة توازن على أساس إستراتيجية وحيدة مفردة دائماً تسمى بالإستراتيجية المختلطة .

وتعتمد فكرة الإستراتيجيات المختلطة على تكوين توزيع احتمالي لمجموعة الإستراتيجيات المتاحة لكل طرف من طرفي المباراة .

بالنسبة للاعب A يتم إيجاد متجه الاحتمالات التالي :

$$P = (p_1, p_2, \dots, p_m)$$

حيث :

$$p_1 + p_2 + \dots + p_m = 1$$

$$p_i \geq 0 ; \quad i = 1, 2, \dots, m$$

•  $p_i$  تمثل احتمال أن يختار اللاعب A الإستراتيجية  $i$

•  $m$  تمثل عدد الإستراتيجيات المتاحة أمام اللاعب A

بالنسبة للاعب B يتم إيجاد متجه الاحتمالات التالي :

$$Q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$$

حيث :

$$q_1 + q_2 + \dots + q_n = 1$$

$$q_j \geq 0 ; \quad j = 1, 2, \dots, n$$

•  $q_j$  تمثل احتمال أن يختار اللاعب B الإستراتيجية  $j$

•  $n$  تمثل عدد الإستراتيجيات المتاحة أمام اللاعب B

ويوجد طرق عديدة لإيجاد التوزيع الاحتمالي لمجموعة الإستراتيجيات المتاحة لكل طرف من طرفي المباراة مثل : الطريقة البيانية والطريقة الجبرية وطريقة البرمجة الخطية وطريقة المصفوفات ، وسوف يكتفى هنا بتقديم تقريبا عاما لكل طريقة من هذه الطرق ، ولمزيد من التفاصيل عن تلك الطرق يمكن الرجوع إلى المؤلف المشير لكومار جوبتا وهيرا<sup>(1)</sup>.

(1) Kumar Gupta, P., and Hira, D.S., Operations Research, S. Chand & Company LTD, New Delhi, 1999.

فالطريقة البيانية تعد طريقة تقريبية إلى حد كبير وتعتمد دقة نتائجها على الدقة في الرسم البياني ، فضلاً عن أنه يصعب تطبيقها إذا كانت مصفوفة العائد من الترتيب  $(3 \times 3)$  أو  $(3 \times 4)$  أو  $(4 \times 3)$  وهكذا .

أما الطريقة الجبرية فيسهل استخدامها إذا كانت مصفوفة العائد من الترتيب  $(2 \times 2)$  أو  $(2 \times n)$  أو  $(m \times 2)$  ، أما إذا كانت مصفوفة العائد من رتب أعلى من ذلك فيصعب تطبيق الطريقة الجبرية .

وطريقة البرمجة الخطية تتميز بأنها ثلاثم أي مصفوفة عائد مهما كان ترتيبها كبيراً ، ولكن يصاحب طريقة البرمجة الخطية استخدام طريقة السمبلكر لحل البرنامج الخطي الناتج وهذه الطريقة مرهقة حسابياً خصوصاً إذا كانت مصفوفة العائد من الترتيب  $(3 \times 3)$  أو من رتب أعلى من ذلك .

وأخيراً فإن طريقة المصفوفات تتميز بأنه يمكن استخدامها سواء كانت مصفوفة العائد مربعة أو مستطيلة الشكل ومن أي ترتيب وتعطي نتائج دقيقة للحل الأمثل للمباراة .

لذلك سوف نركز هنا على طريقة المصفوفات كإحدى الطرق المستخدمة لإيجاد الإستراتيجيات المختلطة لكل طرف من طرفي المباراة .

## طريقة المصفوفات Method of Matrices

تستخدم طريقة المصفوفات في تحديد الإستراتيجيات المختلطة المثلى لكل طرف من طرفي المباراة ذات المجموع الصفري .

بفرض أن مصفوفة العائد للمباراة هي المصفوفة  $[a]$  من الترتيب  $(m \times n)$  ، وأن اللاعب  $A$  متاح أمامه الإستراتيجيات :  $1, 2, \dots, m$

باحتمالات قدرها :  $p_1, p_2, \dots, p_m$  على الترتيب . وأن اللاعب B متاح أمامه الإستراتيجيات :  $1, 2, \dots, n$  باحتمالات قدرها :  $q_1, q_2, \dots, q_n$  على الترتيب ، وبفرض أن القيمة المتلى للمباراة - كما سبق أن أسلفنا - هي  $V$  .  
وتستخدم طريقة المصفوفات في تحديد الاحتمالات المختلفة  $p_i$  حيث  $(i = 1, 2, \dots, m)$  للاعب A ، والاحتمالات المختلفة  $q_j$  حيث  $(j = 1, 2, \dots, n)$  للاعب B وكذلك تحديد القيمة المتلى للمباراة ،  $V$  ، وذلك من خلال الخطوات التالية في كل من الحالتين الآتيتين :

### الخطوة 1 :

الحالة الأولى : إذا كانت مصفوفة العائد  $[a]$  مستطيلة الشكل حيث :  $m \neq n$

في هذه الحالة يتم تجزئة مصفوفة العائد  $[a]$  إلى مجموعة من البدائل كل بديل يشمل مصفوفة عائد مربعة من الترتيب :  $(i \times i)$  حيث  $i = m$  إذا كان  $m < n$  ، بينما  $i = n$  إذا كان  $n < m$  ، ولنرمز لكل مصفوفة مربعة منها بالرمز  $[x]_r$  .

فمثلاً ، إذا كانت مصفوفة العائد  $[a]$  لأحدى المباريات من الترتيب  $(2 \times 3)$  على الصورة :

$$[a] = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \end{matrix}$$

ففي هذه الحالة يتم تجزئة المصفوفة  $[a]$  إلى ثلاثة بدائل مختلفة كل بديل منها عبارة عن مصفوفة جزئية مربعة الشكل من الترتيب  $(2 \times 2)$  كما يلي :



البديل الأول هو :

$$[x]_1 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \end{matrix}$$

البديل الثاني هو :

$$[x]_2 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{pmatrix} \end{matrix}$$

البديل الثالث هو :

$$[x]_3 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \end{matrix}$$

الحالة الثانية : إذا كانت مصفوفة العائد  $[a]$  مربعة الشكل حيث :  $m = n$

في هذه الحالة تؤخذ المصفوفة  $[x]$  كبديل وحيد هو نفسه المصفوفة

$[a]$  ، بمعنى أن :

$$[x] = [a]$$

الخطوة 2 :

لكل مصفوفة مربعة  $[x]$  يتم إيجاد قيمة محدد المصفوفة ويرمز له

بالرمز  $\Delta_x$  ، حيث  $\Delta_x \neq 0$

## الخطوة 3 :

يتم إيجاد مصفوفات المرافقات Cofactor Matrix للمصفوفة  $[x]$  ولنرمز لها بالرمز  $[y]$  . ويعرف مرافق العنصر  $a_{ij}$  بأنه قيمة المحدد الناتج بعد حذف الصف  $i$  والعمود  $j$  المشتملين على العنصر  $a_{ij}$  مضروباً في  $(-1)^{i+j}$  .

فإذا أخذنا المصفوفة  $[x]_1$  ، على سبيل المثال ، يلاحظ أن :

مرافق العنصر  $a_{12}$  هو :

$$a_{21}(-1)^{1+2} = -a_{21}$$

أما مرافق العنصر  $a_{22}$  هو :

$$a_{11}(-1)^{1+1} = a_{11}$$

وهكذا .

## الخطوة 4 :

يتم إيجاد مبدول مصفوفة المرافقات  $[y]$  ولنرمز له بالرمز  $[y']$  ، ويتم ذلك من خلال تحويل صفوف المصفوفة إلى أعمدة أو تحويل أعمدة المصفوفة إلى صفوف بحسب ترتيبها أي بجعل الصف الأول عمود أول ، الصف الثاني عمود ثاني وهكذا .

## الخطوة 5 :

يتم حساب القيمة :

$$[1 \ 1 \ \dots \ 1] [y] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

والنرمز لتلك القيمة بالرمز  $G$

حيث :  $[1 \ 1 \ \dots \ 1]$  هو متجه صفي من الترتيب  $(1 \times i)$  أي مكون من صف واحد ،  $i$  أعمدة وكل عناصره تساوي الواحد الصحيح ،

هو متجه عمودي من الترتيب  $(i \times 1)$  ، أي يشتمل على  $i$  صفوف وعمود واحد وكل عناصره تساوي الواحد الصحيح .

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

الخطوة 6 :

يتم حساب الاحتمالات المختلفة التي يختار بها اللاعب  $A$  عدد  $i$  من الإستراتيجيات المتاحة أمامه وفقاً للقاعدة التالية :

$$[p_1, p_2, \dots, p_i] = [1, 1, \dots, 1] [y'] / G$$

بالمثل ، يتم حساب الاحتمالات المختلفة التي يختار بها اللاعب  $B$  عدد  $i$  من الإستراتيجيات المتاحة أمامه وفقاً للقاعدة التالية :

$$[q_1, q_2, \dots, q_i] = [1, 1, \dots, 1] [y] / G$$

القيمة المتلى للمباراة تحسب كما يلي :

$$V = \Delta_x / G$$

الخطوة 7 :

في الحالة الأولى من الخطوة 1 ، وهي عندما تكون مصفوفة العائد  $[a]$  مستطيلة الشكل من الترتيب  $(m \times n)$  حيث  $m \neq n$  ، فيكون البديل أمثل من

بين مجموعة البدائل الممكنة إذا حقق الشروط التالية بالنسبة لكل طرف من طرفي المباراة :

أ - بالنسبة للاعب A :

$$(1) \quad p_i \geq 0 \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (4-4)$$

ويعني هذا الشرط أن تكون قيم الاحتمالات التي يختار بها اللاعب A الإستراتيجيات المتاحة أمامه موجبة أو تساوي الصفر ، فإذا كان أحد هذه الاحتمالات سالب القيمة فيرفض هذا البديل .

$$(2) \quad \sum_{i=1}^m p_i = 1 \quad (4-5)$$

ويعني هذا الشرط أن يكون مجموع الاحتمالات التي يختار بها اللاعب A الإستراتيجيات المتاحة أمامه مساوياً للواحد الصحيح ، فإذا لم يتحقق هذا الشرط يرفض هذا البديل .

$$(3) \quad a_{11} p_1 + a_{21} p_2 + \dots + a_{m1} p_m \geq V$$

$$a_{12} p_1 + a_{22} p_2 + \dots + a_{m2} p_m \geq V$$

⋮

$$a_{1n} p_1 + a_{2n} p_2 + \dots + a_{mn} p_m \geq V$$

ويمكن اختصار عرض هذا الشرط في الصورة التالية :

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} p_i \geq V \quad (j = 1, 2, 3, \dots, n) \quad (4-6)$$

ب - بالنسبة للاعب B :

$$(4) \quad q_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (4-7)$$

وبالطريقة نفسها يعني هذا الشرط أن قيم الاحتمالات التي يختار بها اللاعب B الإستراتيجيات المتاحة أمامه يجب أن تكون موجبة أو تساوي الصفر ، وإذا كان أحد هذه الاحتمالات سالب القيمة فيرفض هذا البديل .

$$(5) \quad \sum_{j=1}^m q_j = 1 \quad (4-8)$$

ويعني هذا الشرط أن يكون مجموع الاحتمالات التي يختار بها اللاعب B الإستراتيجيات المتاحة أمامه مساوياً للواحد الصحيح ، وعدم تحقق هذا الشرط يعني رفض ذلك البديل .

$$(6) \quad a_{11} q_1 + a_{12} q_2 + \dots + a_{1n} q_n \leq V$$

$$a_{21} q_1 + a_{22} q_2 + \dots + a_{2n} q_n \leq V$$

⋮

$$a_{m1} q_1 + a_{m2} q_2 + \dots + a_{mn} q_n \leq V$$

ويمكن عرض هذا الشرط في الصورة المختصرة التالية :

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} q_j \leq V \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (4-9)$$

فإذا ما تحققت الشروط من (4-4) حتى (4-6) بالنسبة للاعب A وفي نفس الوقت تحققت الشروط من (4-7) حتى (4-9) بالنسبة للاعب B يكون هذا البديل هو البديل الأمثل والذي يحدد قيمة الاحتمالات  $P = [p_1, p_2, \dots, p_m]$

التي يتعين على اللاعب  $A$  أن يختار بها الإستراتيجيات المتاحة أمامه ، ويحدد بالمثل متجه الاحتمالات  $Q = [q_1, q_2, \dots, q_n]$  التي يتعين على اللاعب  $B$  أن يختار بها الإستراتيجيات المتاحة أمامه ، بالإضافة إلى تحديد القيمة المثلى للمباراة وهي  $V$  .

ولتوضيح كيفية استخدام طريقة المصفوفات في حل نماذج المباريات التي ليس لها نقطة توازن ، دعنا نأخذ الأمثلة التالية :

مثال (٤) :

شركتان  $A$  ،  $B$  متنافستان للسيطرة على أكبر عدد ممكن من العملاء ، الشركة  $A$  متاح لديها إستراتيجيتين هما :  $a_1$  ،  $a_2$  ، كما أن الشركة  $B$  متاح لديها أيضاً إستراتيجيتين هما :  $b_1$  ،  $b_2$  . وكانت مصفوفة العائد بينهما (بالمليون جنيه) موضحة كما يلي :

		الشركة $B$	
		$b_1$	$b_2$
الشركة $A$	$a_1$	-3	7
	$a_2$	6	1

المطلوب :

إيجاد الحل الأمثل للمباراة .

الحل :

باستخدام معيار أكبر للقيم الصغرى وأصغر للقيم العظمى يلاحظ

ما يلي :

		الشركة B		
		$b_1$	$b_2$	أصغر قيمة في الصف
الشركة A	$a_1$	-3	7	-3
	$a_2$	6	1	<span style="border: 1px solid black;">1</span> → Maximin
أكبر قيمة في العمود		<span style="border: 1px solid black;">6</span> ↓ Minimax	7	
أكبر القيم الصغرى = 1				
أصغر القيم العظمى = 6				

وحيث أن أكبر القيم الصغرى  $\neq$  أصغر القيم العظمى ، فتكون المباراة غير مستقرة وليس لها نقطة توازن .

كما يلاحظ أيضاً أنه لا توجد إستراتيجية محكومة أو متتحية وأخرى سائدة أو مهيمنة لأي من الشركتين ، ومن ثم لا يمكن تخفيض مصفوفة العائد ، وفي هذه الحالة يتعين على كل من الشركتين استخدام الإستراتيجيات المختلطة .

حيث أن مصفوفة العائد من الترتيب  $(2 \times 2)$  لذلك يوجد بديل واحد فقط أمام كل من الشركتين A ، B .

نفرض أن الشركة A سوف تختار الإستراتيجيتين  $a_1$  ،  $a_2$  باحتمالين قدرهما  $p_1$  ،  $p_2$  على الترتيب ، كما أن الشركة B سوف تختار الإستراتيجيتين  $b_1$  ،  $b_2$  باحتمالين قدرهما  $q_1$  ،  $q_2$  على الترتيب .

يتم التوصل للحل الأمثل للمباراة باستخدام طريقة المصفوفات وفقاً للخطوات التالية :

الخطوة 1 :

• المصفوفة  $[x]$  تساوي مصفوفة العائد  $[a]$

$$[x] = [a] = \begin{pmatrix} -3 & 7 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$$

الخطوة 2 :

محدد المصفوفة  $[x]$  هو :

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -3 & 7 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = (-3)(1) - (6)(7) = -45$$

الخطوة 3 :

نحسب مصفوفة المرافقات للمصفوفة  $[x]$  ونرمز لها بالرمز  $[y]$

$$[y] = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ -7 & -3 \end{pmatrix}$$

الخطوة 4 :

يتم إيجاد مبدول مصفوفة المرافقات وهي  $[y']$  :

$$[y'] = \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ -6 & -3 \end{pmatrix}$$

الخطوة 5 :

نحسب القيمة  $G$  ، حيث :



$$\begin{aligned}
 G &= [1 \quad 1] [y] \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 &= [1 \quad 1] \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ -7 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 &= [-6 \quad -9] \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -15
 \end{aligned}$$

الخطوة 6 :

متجه الاحتمالات للشركة A :

$$\begin{aligned}
 [p_1 \quad p_2] &= ([1 \quad 1] [y']) / G \\
 &= \frac{[1 \quad 1] \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ -6 & -3 \end{pmatrix}}{-15} = \frac{[-5 \quad -10]}{-15} \\
 &= \left[ \frac{-5}{-15} \quad \frac{-10}{-15} \right] = \left[ \frac{1}{3} \quad \frac{2}{3} \right]
 \end{aligned}$$

متجه الاحتمالات للشركة B :

$$\begin{aligned}
 [q_1 \quad q_2] &= ([1 \quad 1] [y]) / G \\
 &= \frac{[1 \quad 1] \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ -7 & -3 \end{pmatrix}}{-15} = \frac{[-6 \quad -9]}{-15}
 \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{-6}{-15} & \frac{-9}{-15} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

الخطوة 7 :

القيمة المتلى للمباراة هي :

$$V = \frac{\Delta_x}{G} = \frac{-45}{-15} = 3$$

ويكون الحل الأمثل للمباراة على النحو التالي :

بخصوص الشركة A : عليها أن تختار الإستراتيجية  $a_1$  باحتمال قدره

$$\frac{1}{3} \text{ والإستراتيجية } a_2 \text{ باحتمال قدره } \frac{2}{3} .$$

بخصوص الشركة B : عليها أن تختار الإستراتيجية  $b_1$  باحتمال قدره

$$\frac{2}{5} \text{ والإستراتيجية } b_2 \text{ باحتمال قدره } \frac{3}{5} .$$

ويتحقق ذلك على المستوى العملي كما يلي :

بفرض أن المدة الزمنية المخصصة لإدارة هذا الصراع هي 30 يوماً ،

فإن على الشركة A أن تختار الإستراتيجية  $a_1$  عدداً من الأيام يساوي ( أيام

$$10 = 30 \times \frac{1}{3}) \text{ من الشهر ثم تختار الإستراتيجية } a_2 \text{ عدداً من الأيام}$$

$$\text{يساوي ( يوماً } 20 = 30 \times \frac{2}{3}) \text{ من الشهر} .$$

بالمثل ، فإن الشركة B يتوجب عليها أن تختار الإستراتيجية  $b_1$  عدداً

$$\text{من الأيام يساوي ( يوماً } 12 = 30 \times \frac{2}{5}) \text{ من الشهر ، ثم تختار الإستراتيجية}$$

$$b_2 \text{ عدداً من الأيام يساوي ( يوماً } 18 = 30 \times \frac{3}{5}) \text{ من الشهر} .$$

والقيمة المتلى للمباراة هي :

$$V = 3 \text{ ( مليون جنيه )}$$

وحيث أن تلك القيمة موجبة الإشارة فيعني ذلك أن الشركة A سوف تكسب من هذا الصراع 3 مليون جنيه ، وفي نفس الوقت سوف تخسر الشركة B نفس القيمة أي 3 مليون جنيه .

مثال (٥) :

شركتان A ، B لصناعة السيارات في موقف تنافسي لإجتذاب أكبر عدد ممكن من العملاء وبالتالي تحقيق أكبر عائد ممكن . فإذا كانت الشركة A أمامها الاختيار بين ثلاث إستراتيجيات هي :  $a_1$  ،  $a_2$  ،  $a_3$  ، وبالمثل ، فإن الشركة B أمامها الاختيار بين ثلاث إستراتيجيات هي :  $b_1$  ،  $b_2$  ،  $b_3$  . فإذا خصصت كل شركة مبلغ 6 مليون دولار لإدارة هذا الصراع ، وكانت مصفوفة العائد بين الشركتين ( بالمليون دولار ) كما يلي :

الشركة B		$b_1$	$b_2$	$b_3$
الشركة A	$a_1$	7	1	7
	$a_2$	9	-1	1
	$a_3$	5	7	6

المطلوب :

إيجاد الحل الأمثل للمباراة .

الحل :

وفقاً لمعيار أكبر القيم الصغرى وأصغر القيم العظمى فإن :

		الشركة B			أصغر قيمة في الصف
		$b_1$	$b_2$	$b_3$	
الشركة A	$a_1$	7	1	7	1
	$a_2$	9	-1	1	-1
	$a_3$	5	7	6	5
أكبر قيمة في العمود		9	7	6	Maximin

↓  
Minimax

كما هو واضح فإن :

أكبر القيم الصغرى (Maximin) = 5

أصغر القيم العظمى (Minimax) = 6

وحيث أن أكبر القيم الصغرى لا يساوي أصغر القيم العظمى فتكون المباراة غير مستقرة وليس لها نقطة توازن .

ومن ناحية أخرى يلاحظ أنه لا توجد إستراتيجية محكمة وأخرى مهيمنة لأي من الشركتين المتنافستين وبالتالي لا يمكن تخفيض حجم مصفوفة العائد عن الترتيب  $(3 \times 3)$  . وحيث أن مصفوفة العائد مربعة الشكل فيوجد بنيل واحد أمام كل من الشركتين .

نفرض أن الشركة A سوف تختار الإستراتيجيات الثلاثة المتاحة لديها وهي :  $a_1, a_2, a_3$  باحتمالات قدرها  $p_1, p_2, p_3$  على الترتيب والشركة B سوف تختار إستراتيجياتها  $b_1, b_2, b_3$  باحتمالات قدرها  $q_1, q_2, q_3$  على الترتيب .

وتستخدم طريقة المصفوفات لتحديد قيم الاحتمالات  $p_i$  حيث  $(i = 1, 2, 3)$ ،  $q_j$  حيث  $(j = 1, 2, 3)$  من خلال الخطوات التالية :

الخطوة 1 :

في هذه الحالة فإن المصفوفة  $[x]$  هي نفسها المصفوفة  $[a]$  .

$$[x] = [a] = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 7 \\ 9 & -1 & 1 \\ -5 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

الخطوة 2 :

محدد المصفوفة  $[x]$  ( باستخدام عناصر الصف الأول ) هو :

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 7 & 1 & 7 \\ 9 & -1 & 1 \\ -5 & 7 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= 7 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 9 & 1 \\ -5 & 6 \end{vmatrix} + 7 \begin{vmatrix} 9 & -1 \\ -5 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= 7(-6 - 7) - 1(54 - 5) + 7(63 + 5) = 336$$

الخطوة 3 :

يتم إيجاد مصفوفة المرافقات للمصفوفة  $[x]$  وهي  $[y]$  .

$$[y] = \begin{pmatrix} -13 & -49 & 68 \\ 43 & 7 & -44 \\ 8 & 56 & -16 \end{pmatrix}$$

فعلى سبيل المثال :

مرافق العنصر  $a_{11}$  من عناصر المصفوفة  $[x]$  يحسب كما يلي :

$$(-1)^{(1+1)} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} = (1)(-6 - 7) = -13$$

مرافق العنصر  $a_{21}$  من عناصر المصفوفة  $[x]$  يحسب كما يلي :

$$(-1)^{(2+1)} \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} = (-1)(6 - 49) = 43$$

وهكذا بالنسبة لباقي عناصر المصفوفة  $[x]$  .

الخطوة 4 :

يتم إيجاد مبدول مصفوفة المرافقات وهي  $[y']$  ، حيث :

$$[y'] = \begin{pmatrix} -13 & 43 & 8 \\ -49 & 7 & 56 \\ 68 & -44 & -16 \end{pmatrix}$$

الخطوة 5 :

تُحسب القيمة  $G$  كما يلي :

$$G = [1 \quad 1 \quad 1] [y] \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= [1 \quad 1 \quad 1] \begin{pmatrix} -13 & -49 & 68 \\ 43 & 7 & -44 \\ 8 & 56 & -16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= [38 \quad 14 \quad 8] \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 60$$

الخطوة 6 :

$$[p_1 \quad p_2 \quad p_3] = \frac{[1 \quad 1 \quad 1] [y']}{G}$$

$$= \frac{[1 \quad 1 \quad 1] \begin{pmatrix} -13 & 43 & 8 \\ -49 & 7 & 56 \\ 68 & -44 & -16 \end{pmatrix}}{60}$$

$$= \frac{[6 \quad 6 \quad 48]}{60} = \left[ \frac{6}{60} \quad \frac{6}{60} \quad \frac{48}{60} \right]$$

$$= [0.1 \quad 0.1 \quad 0.8]$$

إذن :

$$p_1 = 0.1 \quad , \quad p_2 = 0.1 \quad , \quad p_3 = 0.8$$

بالمثل ، فإن :

$$[q_1 \quad q_2 \quad q_3] = \frac{[1 \quad 1 \quad 1] [y]}{G}$$

$$= \frac{[1 \quad 1 \quad 1] \begin{pmatrix} -13 & -49 & 68 \\ 43 & 7 & -44 \\ 8 & 56 & -16 \end{pmatrix}}{60}$$

$$= \frac{[38 \quad 14 \quad 8]}{60} = \left[ \frac{38}{60} \quad \frac{14}{60} \quad \frac{8}{60} \right]$$

إذن :

$$q_1 = \frac{38}{60} \quad , \quad q_2 = \frac{14}{60} \quad , \quad q_3 = \frac{8}{60}$$

القيمة المثلى للمباراة هي :

$$V = \Delta_x / G = \frac{336}{60} = 5.6$$

ويكون الحل الأمثل للمباراة هو :

يتوجب على الشركة A أن تختار الإستراتيجية  $a_1$  باحتمال قدره  $\frac{6}{60}$  ،  
والإستراتيجية  $a_2$  باحتمال قدر  $\frac{6}{60}$  ، والإستراتيجية  $a_3$  باحتمال  $\frac{48}{60}$  ومن



مصلحة الشركة A أن توزع مبلغ 6 مليون دولار المخصص لإدارة الصراع بين الإستراتيجيات الثلاثة على النحو التالي :

تتفق على الإستراتيجية  $a_1$  مبلغ قدره ( مليون دولار  $0.6 = \frac{6}{60} \times 6$  ) :

تتفق على الإستراتيجية  $a_2$  مبلغ قدره ( مليون دولار  $0.6 = \frac{6}{60} \times 6$  )

تتفق على الإستراتيجية  $a_3$  مبلغ قدره ( مليون دولار  $4.8 = \frac{48}{60} \times 6$  )

أما الشركة B فيتوجب عليها أن تختار الإستراتيجية  $b_1$  باحتمال قدره

$\frac{38}{60}$  ، والإستراتيجية  $b_2$  باحتمال قدره  $\frac{14}{60}$  ، والإستراتيجية  $b_3$  باحتمال قدره

$\frac{8}{60}$  . ويتعين عليها أن تتفق المبلغ الذي خصصته لإدارة الصراع كما يلي :

تتفق على الإستراتيجية  $b_1$  مبلغ قدره ( مليون دولار  $3.8 = \frac{38}{60} \times 6$  )

تتفق على الإستراتيجية  $b_2$  مبلغ قدره ( مليون دولار  $1.4 = \frac{14}{60} \times 6$  )

تتفق على الإستراتيجية  $b_3$  مبلغ قدره ( مليون دولار  $0.8 = \frac{8}{60} \times 6$  )

وحيث أن قيمة المباراة المثلثي تساوي 5.6 وهي موجبة الإشارة

فالشركة A سوف تكسب من هذا الصراع مبلغ 5.6 مليون دولار ، بينما

الشركة B سوف تخسر نفس القيمة وهي 5.6 مليون دولار .

مثال (٦) :

في إطار المنافسة بين الشركتين A و B للمنظفات الصناعية ، كان

على الشركة A أن تختار بين بدليين هما : خفض سعر المنتج ( $a_1$ ) أو زيادة

حجم العبوة من المنتج  $(a_2)$  ، بينما الشركة B فمتاح أمامها الاختيار من بين ثلاثة بدائل هي : طرح منتج جديد  $(b_1)$  أو رفع سعر المنتج الحالي  $(b_2)$  أو زيادة الحملة الإعلانية عن المنتج الحالي  $(b_3)$  . وكانت مصفوفة العائد بين الشركتين ( بالمليون جنيه ) كما هو موضح :

الشركة B

		$b_1$	$b_2$	$b_3$
الشركة A	$a_1$	- 3	- 2	2
	$a_2$	1	3	- 5

المطلوب :

إيجاد الإستراتيجية المثلى لكل شركة وحساب القيمة المثلى للمباراة .

الحل :

بتطبيق معيار أكبر القيم الصغرى وأصغر القيم العظمى ينتج أن :

الشركة B

		$b_1$	$b_2$	$b_3$	أصغر قيمة في الصف
الشركة A	$a_1$	- 3	- 2	2	<span style="border: 1px solid black;">- 3</span>
	$a_2$	1	3	- 5	- 5
أكبر قيمة في العمود		<span style="border: 1px solid black;">1</span>	3	2	

حيث أن :

أكبر القيم الصغرى = - 3 ، أصغر القيم العظمى = 1

فتكون المباراة غير مستقرة وليس لها نقطة توازن .

ووفقاً لقاعدة التحكم والسيطرة لا توجد إستراتيجية أو إستراتيجيات مسيطرة وأخرى متتحية لأي من الشركتين وبالتالي لا يمكن تخفيض حجم مصفوفة العائد .

حيث أن مصفوفة العائد تتكون من صفين وثلاثة أعمدة فهي من الترتيب  $(2 \times 3)$  ، لذلك سوف يكون هناك أكثر من بديل أمام طرفي المباراة ، كل بديل يشتمل على مصفوفة عائد من الترتيب  $(2 \times 2)$  . والبديل الذي يحقق الشروط من  $(4 - 4)$  حتى  $(9 - 4)$  سوف يكون هو البديل الأمثل والذي يحقق مصلحة كل من الشركتين المتنافستين في نفس الوقت .

بفرض أن الشركة A سوف تختار الإستراتيجيتين  $a_1, a_2$  باحتمالين قدرهما  $p_1, p_2$  على الترتيب ، كما أن الشركة B سوف تختار الإستراتيجيات  $b_1, b_2, b_3$  باحتمالات قدرها  $q_1, q_2, q_3$  على الترتيب .

البديل الأول :

تختار الشركة A الإستراتيجيتين  $a_1, a_2$  وتختار الشركة B الإستراتيجيتين  $b_1, b_2$  ولا تختار الإستراتيجية  $b_3$  ( وبالتالي فإن  $q_3 = 0$  ) . يتم حل هذا البديل من خلال الخطوات التالية :

الخطوة 1 :

المصفوفة  $[x]$  هي :

$$[x] = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

الخطوة 2 :

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = (-3)(3) - (1)(-2) = -7$$

الخطوة 3 :

مصفوفة المرافقات للمصفوفة  $[x]$  هي :

$$[y] = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

الخطوة 4 :

مبدول مصفوفة المرافقات هي :

$$[y'] = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

الخطوة 5 :

تُحسب القيمة  $G$  ، حيث :

$$\begin{aligned} G &= [1 \quad 1] [y] \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= [1 \quad 1] \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= [5 \quad -4] \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \end{aligned}$$

الخطوة 6 :

$$\begin{aligned}
 [p_1 \quad p_2] &= \frac{[1 \quad 1] [y']}{G} \\
 &= \frac{[1 \quad 1] \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}}{1} = \frac{[2 \quad -1]}{1} \\
 &= \left[ \frac{2}{1} \quad \frac{-1}{1} \right] = [2 \quad -1]
 \end{aligned}$$

يعني ذلك أن  $p_1 = 2$  ,  $p_2 = -1$  لذلك يرفض هذا البديل تماماً لعدم تحقق الشرط (4 - 4) فالقيمة الاحتمالية لا يمكن أن تكون أكبر من الواحد الصحيح كما لا يمكن أن تكون سالبة .

البديل الثاني :

تختار الشركة A الإستراتيجيتين  $a_1$  ,  $a_2$  وتختار الشركة B الإستراتيجيتين  $b_1$  ,  $b_3$  ولا تختار الإستراتيجية  $b_2$  (وبالتالي فإن  $q_2 = 0$ ) .  
يتم حل هذا البديل وفقاً للخطوات التالية :

الخطوة 1 :

المصفوفة  $[x]$  وفقاً لهذا البديل هي :

$$[x] = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$$

الخطوة 2 :

محدد المصفوفة  $[x]$  هو :

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = (-3)(-5) - (1)(2) = 13$$

الخطوة 3 :

مصفوفة المرافقات للمصفوفة  $[x]$  هي :

$$[y] = \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

الخطوة 4 :

مبدول مصفوفة المرافقات  $[y]$  هو :

$$[y'] = \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

الخطوة 5 :

نحسب القيمة  $G$  ، حيث :

$$G = [1 \quad 1] [y] \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= [1 \quad 1] \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= [-7 \quad -4] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = -11$$

الخطوة 6 :

متجه الاحتمالات للشركة A هو :

$$[p_1 \quad p_2] = \frac{[1 \quad 1] [y']}{G}$$

$$= \frac{[1 \quad 1] \begin{bmatrix} -5 & -2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}}{-11}$$

$$= \frac{[-6 \quad -5]}{-11} = \left[ \frac{-6}{-11} \quad \frac{-5}{-11} \right]$$

$$= \left[ \frac{6}{11} \quad \frac{5}{11} \right]$$

ومن ثم ينتج أن :

$$p_2 = \frac{5}{11} \quad , \quad p_1 = \frac{6}{11}$$

وحيث أن قيمة كل من  $p_1$  ,  $p_2$  موجبة ومجموعهما يساوي الواحد

الصحيح فيكون الشرطان (4 - 4) ، (4 - 5) متحققين .

بالمثل ، فإن متجه الاحتمالات للشركة B هو :

$$[q_1 \quad q_3] = \frac{[1 \quad 1] [y]}{G}$$

$$= \frac{\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}}{-11}$$

$$= \frac{\begin{bmatrix} -7 & -4 \end{bmatrix}}{-11} = \begin{bmatrix} \frac{-7}{-11} & \frac{-4}{-11} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{7}{11} & \frac{4}{11} \end{bmatrix}$$

إن،

$$q_3 = \frac{4}{11}, \quad q_1 = \frac{7}{11}$$

وحيث أن قيمة كل من  $q_3$  ،  $q_1$  موجبة ومجموعهما يساوي الواحد الصحيح فيكون الشرطان (4 - 7) ، (4 - 8) متحققين أيضا .

قيمة المباراة هي :

$$V = \frac{\Delta_x}{G} = \frac{13}{-11} = -\frac{13}{11}$$

لاختبار مدى تحقق الشرط (4 - 6) وهو :

$$\sum_{i=1}^2 a_{ij} p_i \geq V \quad j = 1, 2, 3$$

$$- 3\left(\frac{6}{11}\right) + 1\left(\frac{5}{11}\right) = -\frac{13}{11} = V \quad \text{O.K.}$$

$$- 2\left(\frac{6}{11}\right) + 3\left(\frac{5}{11}\right) = \frac{3}{11} > V \quad \text{O.K.}$$



$$2\left(\frac{6}{11}\right) + (-5)\left(\frac{5}{11}\right) = -\frac{13}{11} = V \quad \text{O.K.}$$

وكما هو واضح فإن هذا البديل قد اجتاز الشرط (4 - 6) .

وأخيراً لاختبار مدى تحقق الشرط (4 - 9) وهو :

$$\sum_{j=1}^3 a_{ij} q_j \leq V \quad i=1, 2$$

$$-3\left(\frac{7}{11}\right) + (-2)(0) + 2\left(\frac{4}{11}\right) = -\frac{13}{11} = V \quad \text{O.K.}$$

$$1\left(\frac{7}{11}\right) + 3(0) + (-5)\left(\frac{4}{11}\right) = -\frac{13}{11} = V \quad \text{O.K.}$$

وكما هو واضح فإن البديل الحالي قد اجتاز أيضاً الشرط الأخير

(4 - 9) ، وبذلك يكون هذا البديل هو البديل الأمثل وتكون السياسة المثلى التي

تحقق المصلحة لكل من الشركتين المتنافستين هي على النحو التالي :

بالنسبة للشركة A : عليها أن تختار الإستراتيجية الأولى  $a_1$  ، باحتمال

قدره  $\frac{5}{11}$  ، وتختار الإستراتيجية الثانية  $a_2$  ، باحتمال قدره  $\frac{6}{11}$  .

أما الشركة B : فيتعين عليها أن تختار الإستراتيجية الأولى لها  $b_1$  ،

باحتمال قدره  $\frac{7}{11}$  ، وتختار الإستراتيجية الثالثة لها  $b_3$  ، باحتمال قدره  $\frac{4}{11}$  ، وألا

تختار الإستراتيجية الثانية  $b_2$  ، على الإطلاق . وتكون قيمة المباراة المثلى هي :

$$V = -\frac{13}{11} = -1.182 \quad (\text{مليون جنيه})$$

وحيث أن هذه القيمة سالبة الإشارة فيعني ذلك أن الشركة A سوف تخسر في هذه المباراة 1.182 مليون جنيه بينما الشركة B سوف تكسب نفس القيمة .

سوف يتم بعد ذلك تناول البديل الثالث لمعرفة ما إذا كان هناك حل أمثل آخر للمباراة يحقق نفس القيمة وهي 1.182 مليون جنيه أم لا .

### البديل الثالث :

تختار الشركة A الإستراتيجيتين  $a_1$  ,  $a_2$  وتختار الشركة B الإستراتيجيتين  $b_2$  ,  $b_3$  ولا تختار الإستراتيجية  $b_1$  (وبالتالي فإن  $q_1 = 0$ ) .  
يتم حل هذا البديل وفقاً للخطوات التالية :

### الخطوة 1 :

المصفوفة  $[x]$  وفقاً لهذا البديل هي :

$$[x] = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$$

### الخطوة 2 :

محدد المصفوفة  $[x]$  هو :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = (-2)(-5) - (3)(2) = 4$$

### الخطوة 3 :

مصفوفة المرافقات للمصفوفة  $[x]$  هي :

$$[y] = \begin{pmatrix} -5 & -3 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

### الخطوة 4 :

مبدول مصفوفة المرافقات  $[y]$  هو :

$$[y'] = \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$$

### الخطوة 5 :

تحسب القيمة  $G$  ، حيث :

$$G = [1 \quad 1] [y] \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= [1 \quad 1] \begin{pmatrix} -5 & -3 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= [-7 \quad -5] \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -12$$

### الخطوة 6 :

متجه الاحتمالات للشركة  $A$  هو :

$$[p_1 \quad p_2] = \frac{[1 \quad 1] [y']}{G}$$

$$= \frac{[1 \quad 1] \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}}{-12}$$

$$= \frac{[-8 \quad -4]}{-12} = \left[ \frac{8}{12} \quad \frac{4}{12} \right]$$

بالمثل ، فإن متجه الاحتمالات للشركة B هو :

$$[q_2 \quad q_3] = \frac{[1 \quad 1] [y]}{G}$$

$$= \frac{[1 \quad 1] \begin{pmatrix} -5 & -3 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}}{-12}$$

$$= \frac{[-7 \quad -5]}{-12} = \left[ \frac{7}{12} \quad \frac{5}{12} \right]$$

من هذه الخطوة ينتج أن :

$$p_2 = \frac{4}{12}, p_1 = \frac{8}{12}$$

الواحد الصحيح فيكون الشرطان (4 - 4) ، (4 - 5) متحققين . كما أن :

وكلاهما موجب القيمة ومجموعهما يساوي  $q_2 = \frac{5}{12}$  ،  $q_1 = \frac{7}{12}$

الواحد الصحيح ويكون الشرطان (4 - 7) ، (4 - 8) أيضاً متحققين .

قيمة المباراة وفقاً لهذا البديل هي :

$$V = \frac{\Delta_x}{G} = \frac{4}{-12} = -\frac{4}{12}$$

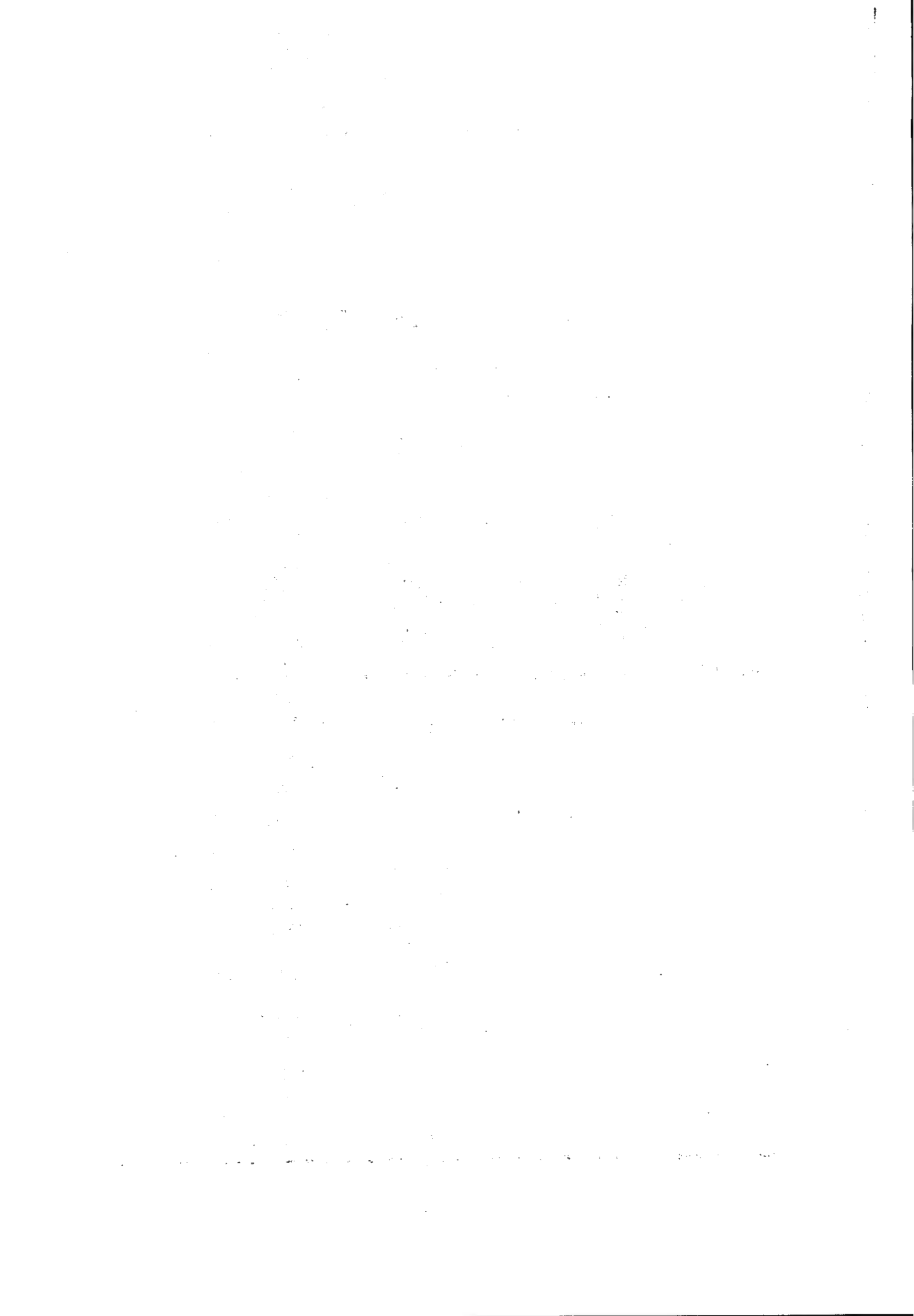
ثم نختبر مدى تحقق الشرط (4 - 6) وهو :

$$\sum_{i=1}^2 a_{ij} p_i \geq V \quad j = 1, 2, 3$$

$$-3\left(\frac{8}{12}\right) + 1\left(\frac{4}{12}\right) = -\frac{20}{12} < V = -\frac{4}{12}$$

ويكون الشرط (4 - 6) بذلك غير متحقق ومن ثم يرفض هذا البديل ،

ويكون البديل الثاني - كما أسلفنا - هو البديل الوحيد الأمثل .



## الباب الخامس

---

### تحليل الشبكات

◎ تعريف الشبكة

◎ شبكات الأعمال : شبكات المسار الحرج وشبكات بيرت

◀ أسلوب المسار الحرج

◀ أسلوب بيرت

◀ تحليل الوقت / تكلفة في شبكات الأعمال

◎ مشكلة أقصر طريق

◎ مشكلة أقصى تدفق

1. The first part of the document is a letter from the President of the United States to the Congress, dated January 3, 1862. It is a very long letter, and it contains a great deal of information about the state of the country at that time. It is a very important document, and it is one of the most interesting documents in the collection.

2. The second part of the document is a letter from the President of the United States to the Congress, dated January 3, 1862. It is a very long letter, and it contains a great deal of information about the state of the country at that time. It is a very important document, and it is one of the most interesting documents in the collection.

3. The third part of the document is a letter from the President of the United States to the Congress, dated January 3, 1862. It is a very long letter, and it contains a great deal of information about the state of the country at that time. It is a very important document, and it is one of the most interesting documents in the collection.

4. The fourth part of the document is a letter from the President of the United States to the Congress, dated January 3, 1862. It is a very long letter, and it contains a great deal of information about the state of the country at that time. It is a very important document, and it is one of the most interesting documents in the collection.

5. The fifth part of the document is a letter from the President of the United States to the Congress, dated January 3, 1862. It is a very long letter, and it contains a great deal of information about the state of the country at that time. It is a very important document, and it is one of the most interesting documents in the collection.

6. The sixth part of the document is a letter from the President of the United States to the Congress, dated January 3, 1862. It is a very long letter, and it contains a great deal of information about the state of the country at that time. It is a very important document, and it is one of the most interesting documents in the collection.



## الباب الخامس تحليل الشبكات Network Analysis

### (١-٥) تعريف الشبكة :

الشبكة هي مجموعة من الأحداث events (أو العقد nodes أو الرؤوس vertices) ومجموعة من الأنشطة activities (أو الأقواس arcs أو الأفرع branches أو الوصلات links) التي تصل بين أزواج من الأحداث ويرمز للأحداث بحروف أو بأعداد متسلسلة ، وللأنشطة بأسماء الأحداث التي تصل بينها .

ويوجد عدة أنواع من الشبكات نذكر منها : شبكات الأعمال و شبكات أقصر طريق و شبكات أقصى تدفق ، وسوف نتناول هذه الأنواع من الشبكات بالتفصيل .

### (٢-٥) شبكات الاعمال : شبكات المسار الحرج وبيرت

#### CPM / PERT Networks

تعتبر شبكة الأعمال تمثيل بياني للأنشطة المختلفة التي يتكون منها أي مشروع توضح علاقات التتابع والتداخل الفنية بين تلك الأنشطة . وقد بدأ التمثيل البياني لشبكات الأعمال بما يعرف بخرائط جانت Gantt Chart نسبة إلى هنري جانت وذلك أثناء الحرب العالمية الأولى لجدولة عمليات الإنتاج .

ومع تطور الحاسبات الآلية ظهرت أساليب حديثة لجدولة الإنتاج ، وتعتبر نماذج شبكات المسار الحرج CPM (Critical Path Method)

وشبكات بيرت (PERT) (Project Evaluation and Review Technique) من أهم الأساليب الحديثة في هذا المجال ، وقد تم ابتكار هذين الأسلوبين في نفس الوقت تقريبا ولكن بشكل مستقل .

فأسلوب المسار الحرج تم ابتكاره على يد مجموعة من الباحثين بشركة دي بونت للكيماويات في عام 1956 ، وفي عام 1957 انضم إليهم مجموعة من الباحثين من شركة ريمنجتون راند للتطبيقات . وقد بدأ استخدام هذا الأسلوب في تخطيط وجدولة العمليات الإنشائية ثم استخدم بعد ذلك في عمليات الصيانة والصناعات البتروكيماوية .

أما أسلوب بيرت فقد تم ابتكاره في عام 1958 على يد مجموعة من الباحثين في البحرية الأمريكية لتطوير برنامج إنتاج صواريخ بولاريس حيث تنسم أنشطة هذا المشروع بدرجة عالية من عدم التأكد مما أدى إلى استخدام بعض التقديرات الاحتمالية ، ثم شاع استخدام أسلوب بيرت بعد ذلك ليشمل أبحاث الفضاء ونظم التسلح وبرامج الطاقة النووية .

وبمرور الوقت تعددت تطبيقات نماذج شبكات المسار الحرج وشبكات بيرت وتداخلت لدرجة أن الأسلوبين أصبحا كما لو كانا أسلوبا واحدا .

وتستخدم نماذج شبكات الأعمال ( نموذج المسار الحرج ونموذج بيرت ) في تحقيق الأهداف التالية :

- ١ - عملية التخطيط وتحقيق الرقابة على تنفيذ المشروعات وأيضا إمكانية تعديل الخطط وتحقيق الرقابة على إنجاز المستجدات أثناء العمل مما يحقق المرونة الكافية أثناء التنفيذ .

- ٢ - تحقيق أهداف المشروع في أقل وقت ممكن ورسم خريطة لأزمنة تنفيذ المشروع وتحديد الفائض الزمني لها وتكلفة تنفيذها .
- ٣ - تساعد في إعداد التقارير الدورية لتنفيذ المشروع على أساس موضوعي ومراجعة وتعديل تلك التقارير إذا دعت الضرورة .
- ٤ - تحديد الأنشطة الأكثر حرجية أثناء التنفيذ للمشروع وإعطاء هذه الأنشطة أهمية خاصة أثناء التنفيذ لضمان عدم تأخير تنفيذ المشروع .

### بعض المفاهيم والمصطلحات الأساسية :

#### ١ - النشاط Activity

هو الأداء أو التنفيذ الفعلي للعمل ، وهو عملية توصيف فنية تشير إلى وحدات محتوى الأعمال في المشروع ، ويستغرق النشاط فترة زمنية وموارد مادية للتنفيذ تختلف من نشاط لآخر ، ويعبر عن النشاط في شبكة الأعمال بسهم ويرمز له إما بحرف أو برقمي البداية والنهاية كما يلي :



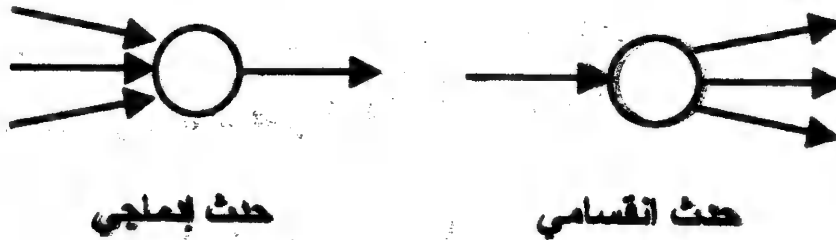
شكل (٥ - ١)

فإذا أن نقول النشاط A أو النشاط (١ - ٢) ، ويجب ملاحظة أن طول السهم المعبر عن النشاط وشكله واتجاهه لا علاقة له بحجم النشاط . وعند تقدير زمن تنفيذ النشاط يمكن استخدام أي وحدات زمنية ( ساعة - يوم - أسبوع - ..... ) ولكن يجب أن تكون هذه الوحدات متجانسة على مستوى أنشطة المشروع ككل .

## ١ - الحدث Event

يمثل الحدث بداية أو نهاية نشاط معين ، فالحدث هو نقطة زمنية محددة وبالتالي فهو لا يستغرق وقت أو موارد عند التنفيذ ، ويعبر عن الحدث في شبكات الأعمال عادة بدائرة تحمل رقماً ، والحدث في بداية النشاط يسمى حدث البداية للنشاط والحدث في نهاية النشاط يسمى حدث النهاية للنشاط ، ففي شكل (٥ - ١) نلاحظ أن الحدث (١) يمثل حدث البداية للنشاط A والحدث (٢) يمثل حدث النهاية لنفس النشاط .

والحدث الذي يمثل نقطة النهاية لأكثر من نشاط في نفس الوقت يسمى حدث إجماعي ، أما الحدث الذي يمثل نقطة البداية لأكثر من نشاط في نفس الوقت يسمى حدث انقسامي كما يتضح من شكل (٥ - ٢) :



شكل (٥ - ٢)

## ٢ - المسار Path

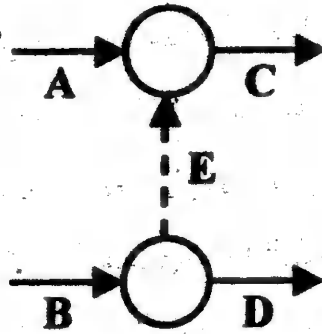
المسار هو مجموعة من الأنشطة المتصلة من حدث البداية بشبكة الأعمال إلى حدث النهاية أو إلى أي حدث آخر بالشبكة .

## ٤ - النشاط الوهمي Dummy Activity

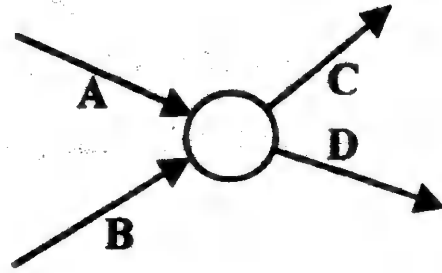
هو نشاط غير حقيقي بمعنى أنه ليس موجود في الواقع الفعلي وبالتالي فهو لا يحتاج إلى وقت أو موارد لتنفيذه ، ويمثل عادة في شبكة الأعمال بسهم

متقطع . ويتم إدخال النشاط الوهمي في الحالات التي تتعدد فيها الأنشطة بين حدثين متتاليين ، إذ لا يسمح في شبكات الأعمال باستخدام أسهم متوازية بين الأحداث أو أن يمثل السهم أكثر من نشاط حتى يمكن الاحتفاظ بمسارات محددة لشبكة الأعمال ، ولتوضيح هذه النقطة دعنا نأخذ المثال التالي :

بفرض أن النشاط C يعتمد في بدايته على الانتهاء من النشاطين A ، B وأن النشاط D يعتمد على الانتهاء من النشاط B فقط ، فتمثيل ذلك بالشكل (٥ - ٣) يعد تمثيلاً خاطئاً ، أما التمثيل الصحيح فيقتضي إدخال للنشاط الوهمي E كما في الشكل (٥ - ٣ ب) :



تمثيل صحيح  
(ب)



تمثيل خاطئ  
(أ)

شكل (٥ - ٣)

## ٥ - شبكة الأعمال Network

شبكة الأعمال هي تمثيل بياني للعلاقات المتتابعة والمتداخلة بين الأنشطة والأحداث اللازمة حسب تسلسلها العام وتسمى الشبكات أحياناً بشبكات الأسهم .

## بناء شبكات الأعمال

يتم أولاً تجزئة المشروع إلى مجموعة من الأنشطة ويحدد أيضاً حدثي البداية والنهاية للمشروع ككل ، ويتم بعد ذلك تحديد علاقات التتابع والتداخل بين الأنشطة في تسلسل منطقي وفقاً للمتطلبات الفنية للمشروع ، وهذه النقطة تقتضي الإجابة على التساؤلات التالية بالنسبة لكل نشاط بشبكة الأعمال :

- ما هي الأنشطة التي يجب الانتهاء منها قبل بداية هذا النشاط ؟
- ما هي الأنشطة التي تتبع أو تلي هذا النشاط ؟
- ما هي الأنشطة التي سوف تنفذ في نفس الوقت مع هذا النشاط ؟

ومن رسم شبكة الأعمال ينبغي مراعاة القواعد التالية :

- أ - لا يمكن تحقق حدث معين قبل الانتهاء من كافة الأنشطة السابقة لهذا الحدث ، كما لا يمكن بداية نشاط معين قبل تحقق الأحداث التي تنهي جميع الأنشطة السابقة لهذا النشاط .
- ب - ينبغي عدم تصوير أي حدث أو نشاط سوى مرة واحدة فقط ، كما أن السهم الواحد الدال على نشاط معين ينبغي ألا يربط سوى بين حدثين فقط .
- ج - ينبغي أن تكون الأسهم المعبرة عن الأنشطة في اتجاه واحد من ( اليسار إلى اليمين ) ولا يسمح بالارتداد في الاتجاه العكسي .
- د - ينبغي أن تكون الأسهم المعبرة عن الأنشطة ممثلة بخطوط مستقيمة ولا يسمح بأن تأخذ شكل منحنى .
- هـ - في حالة اعتماد أكثر من حدث على الانتهاء من نشاط معين ينبغي استخدام نشاط وهمي للدلالة على الترابط المتعدد بين الأنشطة حتى يتوفر لكل نشاط مساره المستقل بين حدثين محددين .

و - ينبغي ترقيم الأحداث بشكل يعكس تدفق مسار الأنشطة وفقاً للطبيعة الفنية للمشروع ، ويتم ذلك وفقاً للخطوات التالية :

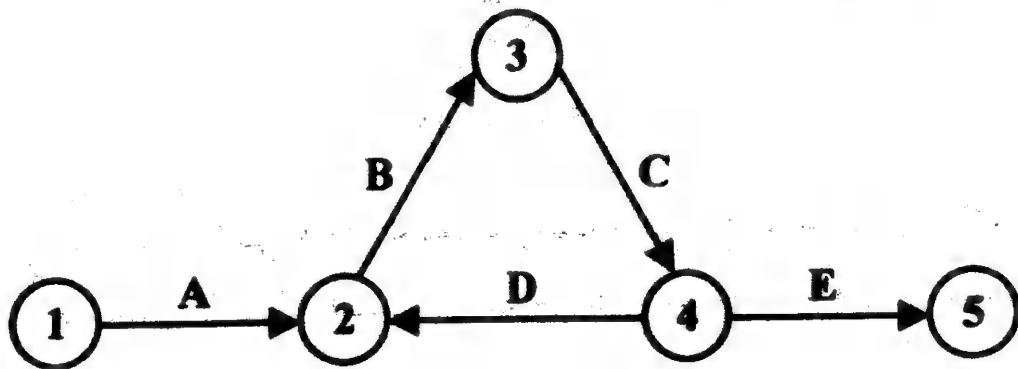
١ - فحدث البداية للمشروع الذي تخرج منه الأسهم ولا يدخل فيه أي سهم يعطي الرقم (1) .

٢ - بحذف كافة الأسهم الخارجة من الحدث (1) فإن هذا سوف يخلق بعض الأحداث المبدئية ( أو على الأقل حدث واحد ) فيتم ترقيم هذه الأحداث بالأرقام (2) ، (3) ، (4) ، ..... .

٣ - يتم تكرار الخطوة الثانية لترقيم الأحداث بالأرقام التالية حتى نصل إلى حدث النهاية للمشروع وهو الحدث الذي تدخل فيه الأسهم ولا يخرج منه أي سهم ويرقم بالرقم النهائي .

#### ٦ - الدائرية Looping

ينشأ موقف الدائرية - في بعض الأحيان - في شبكات الأعمال وذلك بسبب التمثيل الخاطئ لتتابع الأنشطة بالشبكة حيث لا يتقدم مسار الأنشطة بل يدور حول نفسه في دوامة متصلة . ففي شكل (٥ - ٤) نجد أن الأنشطة B ، C ، D تشكل فيما بينها حلقة دائرية .



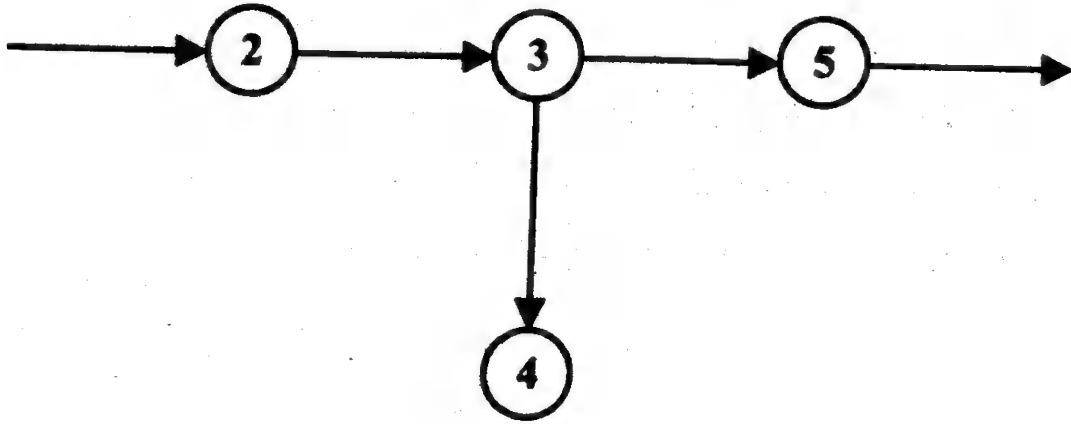
شكل (٥ - ٤)

إذ لا يمكن بدء النشاط B دون الانتهاء من النشاطين A ، D ، والنشاط D يعتمد بدوره على النشاط C والنشاط C يتطلب الانتهاء من النشاط B ، وهكذا نجد أن مسار الأنشطة لا يتقدم وإنما يدور في حلقة متصلة .

ويمكن تجنب حدوث دوران المسار حول نفسه وذلك بإعادة تحديد العلاقات بين الأنشطة تمهيداً لإعادة ترتيبها وترقيمها في تسلسل منطقي .

### ٧ - التعليق Dangling

ينشأ هذا الموقف عندما يكون هناك بعض الأنشطة بشبكة الأعمال بخلاف النشاط ( الأنشطة ) النهائية ليس لها أنشطة تالية ، ذلك أن مسار شبكة الأعمال سوف يعلق عند نقطة معينة ولا يستطيع التقدم كما في شكل ( ٥ - ٥ ) .



شكل ( ٥ - ٥ )

ويمكن تلافي هذا الموقف بمراعاة أن كل الأحداث بشبكة الأعمال ( بخلاف حدثي البداية والنهاية ) يجب أن يكون لها على الأقل مدخل واحد ومخرج واحد .



### (١-٢-٥) أسلوب المسار الحرج (CPM)

يعتبر أسلوب المسار الحرج أحد أساليب شبكات الأعمال التي تركز على الأنشطة الأساسية لأداء المشروع ، ويستخدم هذا الأسلوب في حالة المشروعات التي يمكن تقدير وقت تنفيذ أنشطتها بشكل محكم ودقيق بعيداً عن حالات عدم التأكد .

ويوجد بعض المصطلحات والمفاهيم الخاصة بنموذج المسار الحرج نذكرها في الجزء التالي :

#### ١ - الوقت المبكر Earliest Time

ينقسم الوقت المبكر للنشاط إلى قسمين أساسيين هما :

أ - وقت البدء المبكر للنشاط : هو أول وقت يمكن أن يبدأ فيه النشاط بعد الانتهاء من كافة الأنشطة السابقة بفرض بدايتها أيضاً في الوقت المبكر ، وبالتالي فإن وقت البدء المبكر للنشاط الأول ( عند حدث البداية ) يساوي صفر دائماً .

ب - وقت الانتهاء المبكر للنشاط : هو وقت البدء المبكر للنشاط مضافاً إليه الوقت المقدر لتنفيذ هذا النشاط . ويكون وقت الانتهاء المبكر لآخر نشاط بالشبكة ( عند حدث النهاية ) يعبر عن الوقت الإجمالي اللازم لتنفيذ المشروع ككل .

#### ٢ - الوقت المتأخر Latest Time

ينقسم الوقت المتأخر للنشاط أيضاً إلى قسمين أساسيين هما :

- أ - وقت البدء المتأخر للنشاط : هو آخر وقت يمكن أن يبدأ فيه النشاط بحيث يتم أدائه دون تأخير في تنفيذ المشروع عن الوقت المبكر للحدث النهائي ، ويتم حساب وقت البدء المتأخر للنشاط وذلك بطرح الوقت المقدر لتنفيذ النشاط من وقت الانتهاء المتأخر لذلك النشاط .
- ب - وقت الانتهاء المتأخر للنشاط : هو آخر وقت يمكن أن ينتهي فيه النشاط ، فالوقت المتأخر للانتهاء من النشاط الأخير يشير إلى الوقت الإجمالي اللازم لتنفيذ المشروع ككل .

## ٢ - المسار الحرج Critical Path

المسار الحرج هو أطول مسارات الشبكة زمنياً وهو يتكون من مجموعة من الأنشطة الحرجة من حدث البداية إلى حدث النهاية ، وقد تشمل شبكة الأعمال على أكثر من مسار حرج وسيكون لهم - بالطبع - نفس الطول . وتحديد المسار الحرج يتطلب القيام بتعيين من الحسابات وهما : الحسابات الأمامية والحسابات الخلفية .

### أ - الحسابات الأمامية Forward Computations

تهتم الحسابات الأمامية بحساب الوقت المبكر للأحداث بالشبكة ، وتبدأ الحسابات الأمامية بحدث البداية والذي يمثل نقطة بداية المشروع بزمان يساوي صفر ثم نتحرك بعد ذلك إلى الحدث التالي في التتابع ونحسب الوقت المبكر للوصول إليه ويستمر التحرك للأمام حتى نصل إلى حدث النهاية بالشبكة والذي يمثل نقطة نهاية المشروع ، فإذا اعتبرنا النشاط (i - j) وفرضنا أن :

وقت البداية المبكرة Earliest Start Time لحدث البداية (i) هو :  $ES_i$

$ES_j$  : وقت البداية المبكرة لحدث النهاية (j) هو :

$t_{ij}$  : الزمن المقدر لإنجاز النشاط (i - j) هو :

فيكون :

وقت البداية المبكرة لحدث النهاية (j) هو :

$$ES_j = \max(ES_i + t_{ij})$$

• وذلك لجميع الأنشطة المؤدية إلى الحدث (j)

• حيث :  $ES_1 = 0$

#### ب - الحسابات الخلفية Backward Computations

تهتم الحسابات الخلفية بحساب الوقت المتأخر للأحداث بالشبكة أي النهاية المتأخرة Latest Finish Time لجميع الأنشطة بالشبكة بحدث النهاية وتحدد له وقتاً مساوياً لوقت الإنجاز المبكر لهذا الحدث ( والذي يساوي وقت إنجاز المشروع ككل ) ، فإذا كان  $j = n$  هو الحدث النهائي بشبكة الأعمال ، فإن المساواة :

$$LF_{in} = LS_n = ES_n$$

تشكل بداية الحسابات للارتداد في الاتجاه العكسي حتى نصل إلى الحدث الأول ( أي نقطة بداية المشروع ) في شبكة الأعمال ، فإذا فرضنا أن :

وقت البداية المتأخرة Latest Start Time لحدث البداية (i) هو :  $LS_i$

وقت البداية المتأخرة لحدث النهاية (j) هو :  $LS_j$

فيكون :

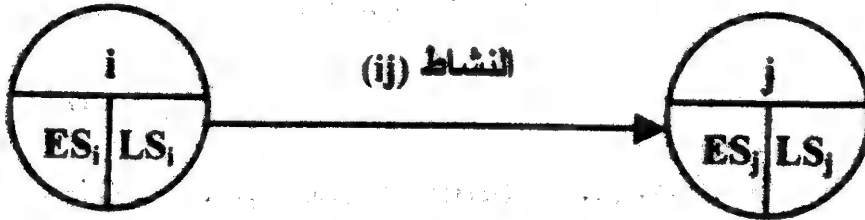
وقت البداية المتأخرة لحدث البداية (i) هو :

$$LS_i = \min (LS_j - t_{ij})$$

• وذلك لجميع الأنشطة المتفرعة ( أي الخارجة ) من الحدث (i)

ويمكن تمثيل  $ES_i$  ،  $LS_i$  ،  $ES_j$  ،  $LS_j$  للنشاط (i - j) بيانياً كما في

شكل (٥ - ٦) :



شكل (٥ - ٦)

بعد الانتهاء من الحسابات الأمامية والخلفية بشبكة الأعمال يمكن تحديد الأنشطة الحرجة بالشبكة ، ويكون النشاط حرجاً إذا حقق الشروط الثلاثة الآتية :

أ - وقت البداية المبكرة = وقت البداية المتأخرة . وذلك لحدث البداية (i) ، أي أن :

$$ES_i = LS_i$$

ب - وقت البداية المبكرة = وقت البداية المتأخرة . وذلك لحدث النهاية (j) ، أي أن :

$$ES_j = LS_j$$

ج - الفرق بين الوقتين في (أ) ، (ب) يساوي الوقت المقدر لتنفيذ النشاط ، أي أن :

$$ES_j - ES_i = LS_j - LS_i = t_{ij}$$

ومجموعة الأنشطة الحرجة تكون المسار الحرج بشبكة الأعمال من حدث البداية إلى حدث النهاية ، وهو - كما أسلفنا - أطول مسارات الشبكة زمنياً ، وطول المسار الحرج يساوي وقت الإنجاز المبكر ( أو المتأخر ) لحدث النهاية بالشبكة وهو يساوي الزمن الإجمالي اللازم لإنجاز المشروع ككل .

#### ٤ - الوقت الرائد Float Time

إذا كان الوقت المبكر يمثل الحد الأدنى للبدء أو للانتهاء من النشاط والوقت المتأخر يمثل الحد الأقصى للبدء أو للانتهاء من النشاط بحيث يمكن تنفيذه دون أن يتأثر الوقت الإجمالي للمشروع ، فإن الفرق بين الوقتين يشير إلى الوقت الرائد الذي يمكن للنشاط أن يتأخر في حدوده دون أن يؤثر ذلك على الجدول الزمني لتنفيذ المشروع .

وقبل أن نشرح أسلوب حساب الوقت الرائد ، فإنه يجب أن نعرف بعض الأزمنة المقترنة بكل نشاط من أنشطة الشبكة ، هذه الأزمنة هي :

زمن البداية المتأخرة للنشاط  $LS_{ij}$  (i - j) (Latest Start Time) ويمكن حسابه من العلاقة :

$$LS_{ij} = LS_j - t_{ij}$$

زمن النهاية المبكرة للنشاط  $EF_{ij}$  (i - j) (Earliest Finish Time) ويمكن حسابه من العلاقة :

$$EF_{ij} = ES_i + t_{ij}$$

ويوجد ثلاثة أنواع من الوقت الراكد هي : الإجمالي والحر والمستقل ،  
وسوف نتناول كل منها بالتفصيل :

أ - الوقت الراكد الإجمالي (Total Float) TF

الوقت الراكد الإجمالي هو الفرق بين الحد الأقصى المتاح زمنياً لأداء  
النشاط وزمن إنجاز النشاط ، والحد الأقصى المتاح زمنياً لأداء النشاط يمثل  
الفرق بين وقت البداية المبكرة ووقت النهاية المتأخرة للنشاط ، أي أن :

الوقت الأقصى المتاح للنشاط = وقت الانتهاء المتأخر للنشاط  
- وقت البدء المبكر للنشاط

ومن ثم فإن :

الوقت الراكد الإجمالي للنشاط = الوقت الأقصى المتاح للنشاط  
- الوقت المقدر لتنفيذ النشاط

= وقت الانتهاء المتأخر للنشاط - وقت البدء المبكر للنشاط - الوقت  
المقدر لتنفيذ النشاط

وحيث أن :

وقت الانتهاء المتأخر للنشاط - الوقت المقدر لتنفيذ النشاط = وقت  
البدء المتأخر للنشاط

وبالتالي فإن :

الوقت الراكد الإجمالي للنشاط (i - j) = وقت البداية المتأخرة للنشاط  
(i - j) - وقت البداية المبكرة للنشاط (i - j) .

أي أن :

$$\begin{aligned} TF_{ij} &= LS_{ij} - ES_{ij} \\ &= LS_{ij} - ES_i \end{aligned}$$

بالمثل ، يمكن حساب الوقت الراكد الإجمالي للنشاط (i - j) باستخدام العلاقة التالية :

$$\begin{aligned} \text{الوقت الراكد الإجمالي للنشاط (i - j)} &= \text{وقت النهاية المتأخرة للنشاط} \\ &- \text{وقت النهاية المبكرة للنشاط (i - j)} \end{aligned}$$

أي أن :

$$\begin{aligned} TF_{ij} &= LF_{ij} - EF_{ij} \\ &= LS_j - EF_{ij} \end{aligned}$$

ويلاحظ أن الوقت الراكد الإجمالي للأنشطة الحرجة - أي تلك التي تقع على المسار الحرج - يساوي صفر .

ب - الوقت الراكد الحر (Free Float) FF

الوقت الراكد الحر هو الوقت الفائض الذي يتاح للنشاط عندما يتم إنجاز كافة الأنشطة السابقة عليه واللاحقة له في الوقت المبكر ، وهو يشير إلى الوقت الذي يمكن للنشاط أن يتأخر به أثناء التنفيذ دون أن يؤدي ذلك إلى تأخير الأنشطة اللاحقة له .

ويتم حساب الوقت الراكد الحر للنشاط (i - j) كما يلي :

$$\begin{aligned} \text{الوقت الراكد الحر للنشاط} &= \text{وقت البدء المبكر للنشاط التالي} - \text{وقت} \\ &\text{البدء المبكر للنشاط الحالي} - \text{الوقت المقدر لتنفيذ النشاط الحالي} \end{aligned}$$

= وقت البدء المبكر للنشاط التالي - ( وقت البدء المبكر للنشاط الحالي

+ الوقت المقدر لتنفيذ النشاط الحالي )

= وقت البدء المبكر للنشاط التالي - وقت الانتهاء المبكر للنشاط الحالي

وبالتالي فإن :

$$FF_{ij} = ES_j - (ES_i + t_{ij}) = ES_j - EF_{ij}$$

### ج - الوقت الراكد المستقل (Independent Float) IF

الوقت الراكد المستقل هو الوقت الفائض الذي يتاح للنشاط عندما يتم كافة الأنشطة السابقة عليه في الوقت المتأخر وكافة الأنشطة اللاحقة له في الوقت المبكر ، وهو يعني الفائض الزمني الذي يمكن للنشاط أن يتأخر به دون أن يؤثر ذلك على الأوقات الراكدة الأخرى للأنشطة اللاحقة لهذا النشاط .

ويتم حساب الوقت الراكد المستقل للنشاط (i - j) كما يلي :

الوقت الراكد المستقل للنشاط = وقت البداية المبكرة للنشاط التالي -

وقت النهاية المتأخرة للنشاط السابق - الوقت المقدر لتنفيذ النشاط الحالي

أي أن :

$$IF_{ij} = ES_j - LS_i - t_{ij}$$

من العرض السابق نلاحظ أنه إذا امتد زمن تنفيذ النشاط ليمتص الوقت الراكد الإجمالي فإنه يصبح نشاطاً حرجاً ، وإذا امتد زمن تنفيذ النشاط ليمتص الوقت الراكد الحرج فإن ذلك لن يؤثر على الوقت المتاح للأنشطة اللاحقة له ولكنه يؤثر على الوقت المتاح للأنشطة السابقة عليه ، أما استقاز الوقت الراكد المستقل



للنشاط فلن يؤثر على الوقت المتاح لأي من الأنشطة السابقة عليه أو اللاحقة له ،  
وسوف يقتصر تأثيره فقط على الوقت المتاح للنشاط الحالي .

ويمكن تحديد العلاقة بين المستويات الثلاثة للوقت الراكد للنشاط

كما يلي :

• إذا كان الوقت الراكد الإجمالي لنشاط ما يساوي صفر ، فإن الوقت  
الراكد الحر والوقت الراكد المستقل للنشاط ينبغي أن يكونا مساويين  
أصفر ، أو في مستوى سالب .

• إذا كان الوقت الراكد الحر لنشاط ما يساوي صفر ، فإن الوقت الراكد  
الإجمالي قد يساوي أو لا يساوي صفر ، بينما يكون الوقت الراكد  
المستقل مساوياً للصفر أو في مستوى سالب .

• إذا كان الوقت الراكد المستقل لنشاط ما يساوي صفر ، فإن الوقت الراكد  
الإجمالي والوقت الراكد الحر للنشاط يمكن أن يأخذ كل منهما أي قيمة  
صفرية أو غير صفرية .

ومن ثم فإن العلاقة بين المستويات الثلاث للوقت الراكد للنشاط تكون

على الصورة التالية :

الوقت الراكد الإجمالي أكبر من أو يساوي الوقت الراكد الحر ، والوقت  
الراكد الحر أكبر من أو يساوي الوقت الراكد المستقل ، أي أن :

$$TF_{ij} \geq FF_{ij} \geq IF_{ij}$$

وتحديد الوقت الراكد بمستوياته المختلفة يفيد في تحديد مدى مرونة  
جدولة تنفيذ المشروع زمنياً والموارد التي ينبغي استخدامها في كل نشاط ويفيد

أيضاً في بيان مدى إمكانية تحويل جزء من الموارد المخصصة للأنشطة غير الحرجة وتوجيهها إلى الأنشطة الحرجة مما يمكن من تخفيض وقت إنجاز تلك الأنشطة ويؤدي ذلك بالتبعية إلى تخفيض وقت وتكلفة تنفيذ المشروع ككل .

### الوقت الراكد السالب (Negative Float) NF

توجد بعض الحالات التي يكون فيها للوقت الراكد بأي من مستوياته الثلاث قيمة سالبة نوجزها فيما يلي :

- ١ - إذا كان الوقت المخطط لتنفيذ المشروع يساوي الوقت المبكر لتنفيذ الأنشطة الحرجة ( أي مساوياً لطول المسار الحرج ) ، ففي هذه الحالة فإن الوقت الراكد الإجمالي لكافة الأنشطة الحرجة سيكون مساوياً للصفر . وفي هذه الحالة فإن الوقت الراكد المستقل يمكن أن يأخذ قيمة سالبة وهو موقف يماثل تماماً مساواته بالصفر ، ويمكن وضع صفر بدلاً من القيمة السالبة للوقت الراكد المستقل دون أن يؤثر ذلك على معالجة المشروع .
- ٢ - إذا كان الوقت المخطط لتنفيذ المشروع يزيد عن الوقت المبكر لتنفيذ المسار الحرج ، فإن الوقت الراكد الإجمالي سوف يكون موجداً حتى بالنسبة للأنشطة الحرجة وهو يشير حينئذ إلى حدود التأخير التي يمكن للأنشطة أن تتأخر بها مع المحافظة على تحقيق الوقت المخطط للمشروع .
- ٣ - إذا كان الوقت المخطط لتنفيذ المشروع يقل عن الوقت المبكر لتنفيذ الأنشطة الحرجة ، فإن الوقت الراكد الإجمالي سوف يكون سالباً للأنشطة الحرجة وربما لأنشطة أخرى غير حرجة ، هذه القيم السالبة للوقت الراكد الإجمالي للأنشطة الحرجة تشير إلى الوقت اللازم تخفيضه حتى يمكن تحقيق الهدف المخطط .

مثال (١) :

الجدول التالي يبين قائمة بالأنشطة اللازمة لتنفيذ أحد المشروعات الإنسانية وعلاقاتها الفنية والزمن اللازم لتنفيذها بالشهور :

النشاط	زمن تنفيذ النشاط ( بالشهور )	النشاط السابق
A	3	لا يوجد
B	3	A
C	2	A
D	0	B
E	3	B
F	2	B
G	7	B , C
H	6	B , C
I	6	E , G
J	9	F
K	4	H

المطلوب :

- ١ - رسم شبكة الأعمال للمشروع وتحديد المسار الحرج وكذا الزمن المتوقع لإنجاز المشروع ككل .
- ٢ - تحديد الجدول ( الخريطة ) الزمني ( الزمنية ) وحساب الوقت الراكد بمستوياته الثلاث : الإجمالي والحر والمستقل لأنشطة المشروع .



- وقت الإنجاز المبكر = وقت الإنجاز المتأخر (لحدث البداية رقم 2) = 3  
أي أن :

$$ES_2 = LS_2 = 3$$

• فيكون الشرط الأول متحققاً .

- وقت الإنجاز المبكر = وقت الإنجاز المتأخر (لحدث النهاية رقم 3) = 6  
أي أن :

$$ES_3 = LS_3 = 6$$

• فيكون الشرط الثاني متحققاً .

- الفرق بين الوقتين يساوي  $3 = 6 - 3$  وهو يساوي  $t_{23}$  أي الزمن المقدر

• لتنفيذ النشاط (2 - 3)

• فيكون الشرط الثالث متحققاً .

• ومن ثم يكون النشاط B أو (2 - 3) نشاطاً حرجاً .

• أما النشاط J أو (6 - 8) فيلاحظ بالنسبة له ما يلي :

- وقت الإنجاز المبكر = 8  $\neq$  وقت الإنجاز المتأخر = 10 (بالنسبة لحدث

• البداية رقم 6)

أي أن :

$$ES_6 = 8 \neq LS_6 = 10$$

• فيكون الشرط الأول غير متحقق وبالتالي يكون النشاط J غير حرج .

• كذلك بالنسبة للنشاط E أو (3 - 5) - على سبيل المثال - يلاحظ

ما يلي :

- وقت الإنجاز المبكر = وقت الإنجاز المتأخر ( لحدث البداية رقم 3 ) = 6 ،  
أي أن :

$$ES_3 = LS_3 = 6$$

• فيكون الشرط الأول متحققاً .

- وقت الإنجاز المبكر = وقت الإنجاز المتأخر ( لحدث النهاية رقم 5 ) = 13 ،  
أي أن :

$$ES_5 = LS_5 = 13$$

• فيكون الشرط الثاني متحققاً .

- الفرق بين الوقتين يساوي  $13 - 6 = 7$  وهو لا يساوي الزمن المقدر لتنفيذ النشاط ، حيث :

$$t_{35} = 3$$

• فيكون الشرط الثالث غير متحقق .

• لذلك فإن النشاط E أو ( 3 - 5 ) يكون نشاطاً غير حرج .

وكما هو واضح من شبكة الأعمال فإن المسار الحرج يتكون من الأنشطة

A ، B ، D ، G ، I أو الأنشطة ( 1 - 2 ) ، ( 2 - 3 ) ، ( 3 - 4 ) ، ( 4 - 5 ) ، ( 5 - 8 ) ، كما يلاحظ أن :

الزمن المتوقع لإنجاز المشروع ككل = طول المسار الحرج = 19

• شهراً .

٢ - لتحديد الجدول الزمني والوقت الراكد الإجمالي والحر والمستقل لأنشطة

المشروع يلزم تكوين الجدول التالي والذي نورد بخصوصه الملاحظات

التالية :

أ - الوقت الراكد الإجمالي تم حسابه على أساس أنه يساوي ما يلي :

البداية المتأخرة للنشاط - البداية المبكرة للنشاط أي عمود (6) - عمود (4)

أو

النهاية المتأخرة للنشاط - النهاية المبكرة للنشاط أي عمود (7) - عمود (5)

فعلى سبيل المثال ، الوقت الراكد الإجمالي للنشاط E أو (5 - 3) يتم

حسابه كما يلي :

$$TF_{35} = 10 - 6 = 13 - 9 = 4$$

ب - الوقت الراكد الحر للنشاط يتم حسابه - كما أوضحنا في التحليل السابق - على النحو التالي :

وقت البدء المبكر للنشاط التالي - (وقت البدء المبكر للنشاط الحالي + الوقت المقدر لتنفيذ النشاط الحالي) .

فعلى سبيل المثال ، يلاحظ أن :

الوقت الراكد الحر للنشاط C أو (4 - 2) يساوي :

$$FF_{24} = ES_4 - ES_2 - t_{24}$$

$$= 6 - 3 - 2 = 1$$

ج - الوقت الراكد المستقل للنشاط يتم حسابه - كما أوضحنا في التحليل

السابق - على أنه يساوي ما يلي :

وقت البدء المبكر للنشاط التالي - (وقت الانتهاء المتأخر للنشاط السابق +

الوقت المقدر لتنفيذ النشاط الحالي) .

فعلى سبيل المثال ، يلاحظ أن :

الوقت الرائد المستقل للنشاط J أو (6 - 8) يساوي :

$$\begin{aligned} IF_{68} &= ES_8 - LS_6 - t_{68} \\ &= 19 - 10 - 9 = 0 \end{aligned}$$

الجدول الزمني لأنشطة المشروع

النشاط	مسار النشاط (i,j)	وقت تنفيذ النشاط (بالشهور) $t_{ij}$	الوقت المبكر		الوقت المتأخر		الوقت الرائد		
			البداية $ES_i$	النهاية $EF_{ij}$	البداية $LS_{ij}$	النهاية $LS_j$	الإجمالي $TF_{ij}$	الحر $FF_{ij}$	المستقل $IF_{ij}$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
A	(1-2)	3	0	3	0	3	0	0	0
B	(2-3)	3	3	6	3	6	0	0	0
C	(2-4)	2	3	5	4	6	1	1	1
D	(3-4)	0	6	6	6	6	0	0	0
E	(3-5)	3	6	9	10	13	4	4	4
F	(3-6)	2	6	8	8	10	2	0	0
G	(4-5)	7	6	13	6	13	0	0	0
H	(4-7)	6	6	12	9	15	3	0	0
I	(5-8)	6	13	19	13	19	0	0	0
J	(6-8)	9	8	17	10	19	2	2	0
K	(7-8)	4	12	16	15	19	3	3	0

ملحوظة : \* تعني الأنشطة الحرجة .



## (٢-٢-٥) أسلوب بيرت (PERT)

يتفق أسلوب بيرت (PERT) مع أسلوب المسار الحرج (CPM) في كيفية بناء ورسم شبكة الأعمال للمشروع وفق القواعد التي سبق الإشارة إليها ، وأيضاً في كيفية إعداد الخريطة الزمنية لأنشطة المشروع . إلا أن أسلوب بيرت يسمح بإدخال عنصر عدم التأكد عند تقدير الوقت اللازم لتنفيذ أنشطة المشروع ، فقد تكون بعض الأنشطة نادرة الحدوث أو غير مسبقة مثل أنشطة الأبحاث والتطوير لمنتج معين وقد لا تتوفر البيانات الكافية عن بعض الأنشطة ، وقد يتم تنفيذ بعض الأنشطة في ظل ظروف غير مستقرة مثل عملية حصاد الأرز أثناء موسم الشتاء . هذه الأنشطة يطلق عليها أحياناً " الأنشطة الاحتمالية " ، لذلك فهي تحتاج إلى أسلوب احتمالي عند تقدير وقت تنفيذها .

## أولاً : القيمة المتوقعة والانحراف المعياري لوقت تنفيذ النشاط

أسلوب بيرت هو أسلوب احتمالي يحدد ثلاثة تقديرات مختلفة لوقت تنفيذ النشاط ، هذه التقديرات الثلاث هي كما يلي :

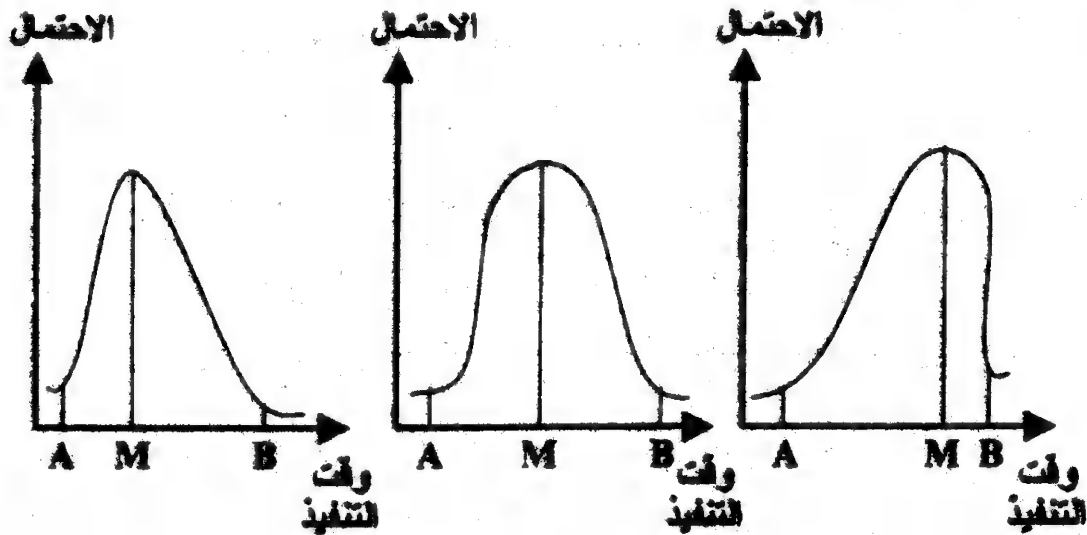
الوقت المتفائل : هو أقصر زمن ممكن لتنفيذ النشاط ، ويفترض توفر أفضل الشروط لإنجاز النشاط ، ويرمز له بالرمز A .

الوقت الأكثر احتمالاً : وهو الزمن الأكثر تواتراً لتنفيذ النشاط ، ويفترض تحقق الظروف الطبيعية لإنجاز النشاط ، ويرمز له بالرمز M .

الوقت المتشائم : وهو أطول زمن ممكن لتنفيذ النشاط ، ويفترض تحقق لردئ الظروف لإنجاز النشاط ( مثل الإضرابات - الزلازل - الحروب - الفيضانات - الخ ) ويرمز له بالرمز B .

ويتم الحصول على هذه التقديرات المختلفة لزمن تنفيذ النشاط عن طريق الأشخاص ذوي الخبرة مثل المهندسين أو المشرفين أو العمال المتخصصين في هذا المجال أو عن طريق مواقف مشابهة سابقة .

ويفترض أسلوب بيرت أن التقديرات المختلفة لوقت تنفيذ الأنشطة تعد متغيرات عشوائية مستقلة تتبع توزيع بيتا Beta Distribution ، وما ذلك إلا لأن توزيع بيتا يعطي مرونة تتوقف على القيم النسبية لكل من  $A$  ،  $M$  ،  $B$  ، كما أن توزيع بيتا لا يشترط أن يكون متماثلاً دائماً بل يمكن أن يكون أيضاً ملتوياً جهة اليمين ( أي التواء موجب ) أو ملتوياً جهة اليسار ( أي التواء سالب ) بعكس الحال في منحنى التوزيع الطبيعي والذي يكون متماثلاً دائماً ، كما أن منحنى توزيع بيتا له نقاط طرفيه دنيا ( متمثلة في النقطة  $A$  ) وقصى ( متمثلة في النقطة  $B$  ) كما يتضح من شكل ( ٥ - ٧ ) .



أزمنة تنفيذ النشاط

منحنيات توزيع بيتا

شكل ( ٥ - ٧ )

ومن الطبيعي أن يكون الزمن المتوقع لتنفيذ النشاط هو القيمة المتوقعة لتوزيع بيتا ،  $\mu$  ، كما أن الانحراف المعياري لزمن تنفيذ النشاط هو الانحراف المعياري لتوزيع بيتا ،  $\sigma$  ، إلا أن أسلوب بيرت افترض صيغة تقريبية عند تقدير الزمن المتوقع لتنفيذ النشاط تعطي وزناً نسبياً أكبر للوقت الأكثر احتمالاً ،  $M$  ، يعادل ضعف الوزن النسبي للوقت المتفائل ،  $A$  ، والوقت المتشائم ،  $B$  . فإذا رمزنا للوقت المتوقع لتنفيذ النشاط  $(i - j)$  بالرمز  $t_{ij}$  ، فإن :

$$t_{ij} = \frac{\frac{A_{ij} + B_{ij}}{2} + 2M_{ij}}{3} = \frac{A_{ij} + 4M_{ij} + B_{ij}}{6}$$

وعند حساب الانحراف المعياري لوقت تنفيذ النشاط فإن توزيع بيتا يفترض أن حوالي 98% من المساحة تحت منحنى التوزيع تنحصر بين  $\pm 3$  الانحراف المعياري .

فإذا رمزنا للانحراف المعياري لوقت تنفيذ النشاط  $(i - j)$  بالرمز  $\sigma_{ij}$  ،

فإن :

$$\sigma_{ij} = \frac{B_{ij} - A_{ij}}{6}$$

بعد الحصول على الوقت المتوقع لتنفيذ أنشطة المشروع يتم بناء ورسم شبكة الأعمال وحساب الجدول الزمني وما يتضمنه من الأوقات المبكرة والمتأخرة لأحداث البداية والنهاية ، وأيضاً الوقت الراكد بمستوياته الثلاث لأنشطة المشروع تملأ بنفس الطريقة التي اتبعت في أسلوب المسار الحرج .

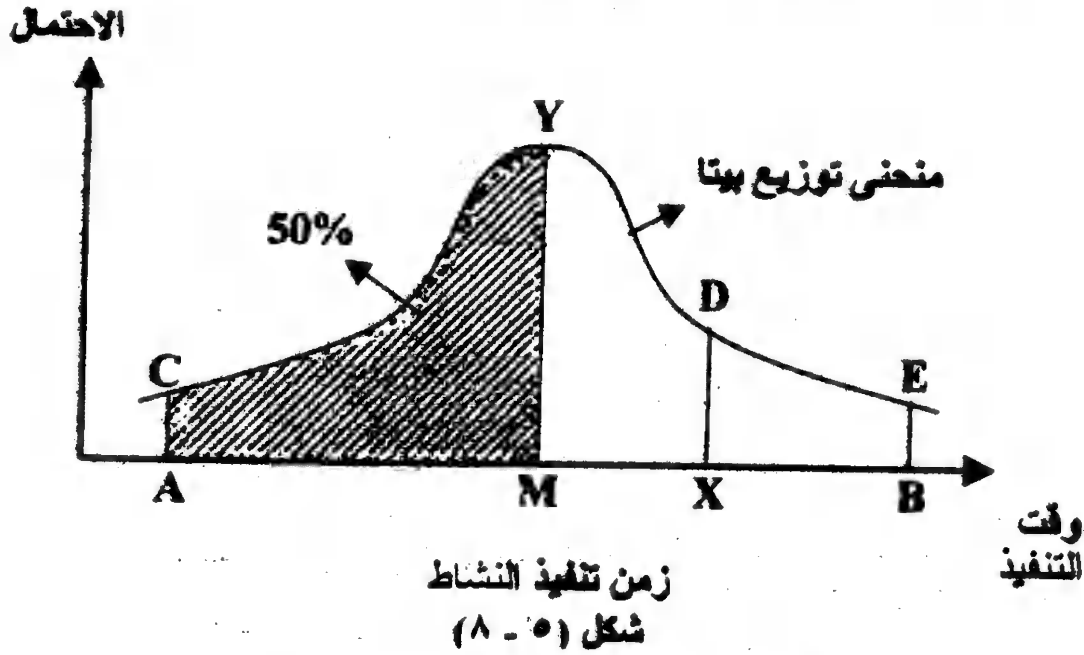
وكما هو واضح فإن أحد الفروق الأساسية بين أسلوب المسار الحرج وأسلوب بيرت هو أن تقديرات أوقات تنفيذ الأنشطة وفقاً لأسلوب المسار الحرج

تكون محددة Deterministic ووفقاً لأسلوب بيرت تكون احتمالية  
• Probabilistic

ثانياً : احتمال تنفيذ المشروع في تاريخ محدد على الأقل ( أو على الأكثر )  
بعد تحديد المسار الحرج وتصوير الجدول الزمني لأنشطة المشروع  
يبرز السؤال المهم التالي :

ما هو احتمال تنفيذ المشروع ككل ( أو حدث معين منه ) في أو قبل  
( بعد ) تاريخ مستهدف معين ؟

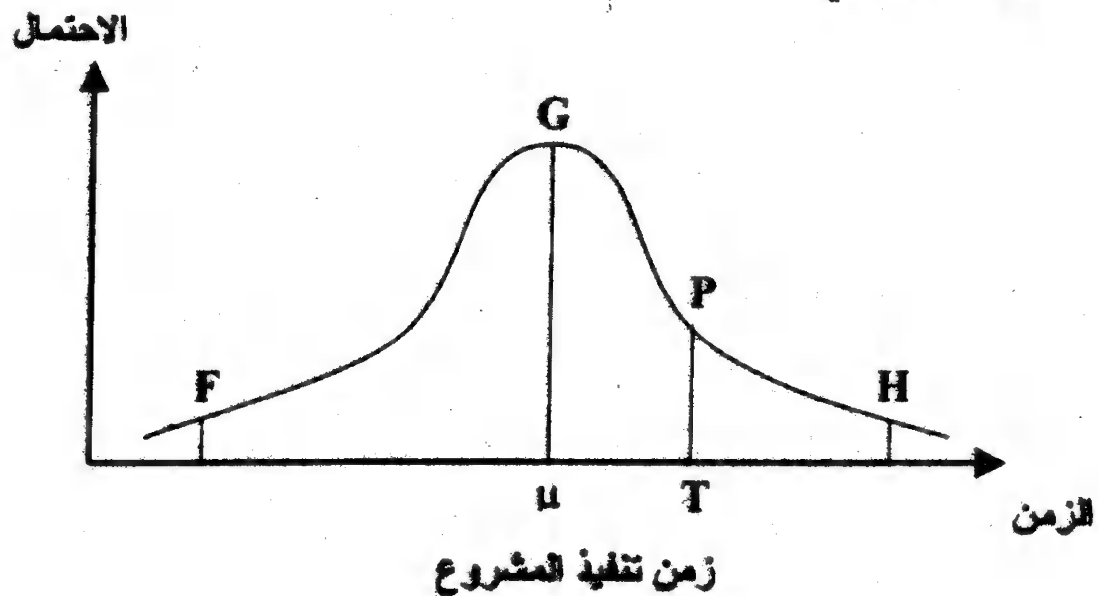
للإجابة على هذا السؤال ، نلاحظ أولاً أنه بخصوص الوقت المتوقع  
لتنفيذ النشاط والذي تم افتراض أنه متغير عشوائي يتبع توزيع بيتا ، فإن احتمال  
تنفيذ النشاط في هذا الوقت المتوقع يساوي 50% . فإذا اعتبرنا منحنى توزيع  
بيتا للوقت المتوقع لتنفيذ النشاط ، فإن الخط الرأسى YM يقسم منحنى التوزيع  
إلى قسمين متساويين في المساحة كما يتضح من شكل ( ٥ - ٨ ) :



لحساب احتمال تنفيذ النشاط في الزمن  $X$  على الأكثر ، فكما يتضح من الشكل السابق ، يتم ذلك كما يلي :

$$\text{احتمال تنفيذ النشاط في الزمن } X \text{ على الأكثر} = \frac{\text{المساحة المحصورة أسفل CYD}}{\text{المساحة المحصورة أسفل CYE}}$$

وحيث أن المشروع يتكون - في الغالب - من مجموعة كبيرة من الأنشطة والتي تمثل متغيرات عشوائية مستقلة ، ومن ثم فإن الوقت المتوقع لإنجاز المشروع ككل سيكون بالطبع هو الآخر متغير عشوائي ولكنه لن يتبع توزيع بيتا ، وإنما وفقاً لنظرية النزعة المركزية Central Limit Theorem ، فإن الوقت المتوقع لتنفيذ المشروع ككل سوف يتبع التوزيع الطبيعي والذي يأخذ الشكل المتمثل التالي :



شكل (٥ - ٩)

والوسط الحسابي للتوزيع الطبيعي وهو  $\mu$  ، في هذه الحالة عبارة عن الوقت المتوقع لإنجاز المشروع ككل والذي يساوي - كما أسلفنا - طول المسار

الخرج بشبكة الأعمال ، كما أن الخط الراسي عند هذه القيمة ( وهو الخط  $G\mu$  ) يقسم المساحة تحت منحنى التوزيع إلى قسمين متساويين مساحة كل منهما تساوي 0.5 .

أما الانحراف المعياري لوقت تنفيذ المشروع ، ويرمز له بالرمز  $\sigma$  ، في هذه الحالة يحسب كما يلي :

الانحراف المعياري لوقت تنفيذ المشروع هو :

$$\sigma = \sqrt{\text{مجموع تباينات الأنشطة الحرجة بشبكة الأعمال}}$$

ويمكن حساب احتمال تنفيذ المشروع في وقت مستهدف ،  $T$  ، الذي يقابل النقطة  $P$  على المنحنى كما يلي :

$$\frac{\text{المساحة المحصورة أسفل FGP}}{\text{المساحة المحصورة أسفل FGH}} = \text{احتمال تنفيذ المشروع في الوقت } T \text{ على الأكثر}$$

ويمكن حساب هذا الاحتمال بواسطة تكامل دالة كثافة الاحتمال للتوزيع الطبيعي من نقطة البداية حتى النقطة  $T$  ، إلا أن ذلك يتطلب وقتاً وجهداً كبيرين ، كذلك يمكن حساب قيمة هذا الاحتمال باستخدام جدول المساحات ، وهذا الجدول يعطي المساحة تحت منحنى التوزيع بين الوسط الحسابي ،  $\mu$  ، وأي قيمة أخرى محددة مثل  $T$  .

ونظراً لاختلاف قيم  $\sigma$  ،  $\mu$  للتوزيعات الطبيعية المختلفة باختلاف المشروعات مما يترتب عليه ضرورة حساب جدول خاص لكل زوج من قيم  $\sigma$  ،  $\mu$  المختلفة وهو أمر مستحيل . لذلك يلزم تحويل وقت تنفيذ المشروع

كمتغير عشوائي يتبع التوزيع الطبيعي إلى المتغير العشوائي الذي يتبع التوزيع الطبيعي المعياري والذي نرسم له بالرمز  $Z$  ، كما يلي<sup>(\*)</sup> :

$$\frac{\text{الوقت المستهدف لتنفيذ المشروع} - \text{الوقت المتوقع لتنفيذ المشروع}}{\sqrt{\text{مجموع تباينات الأنشطة الحرجة}}} = Z$$

والمتغير العشوائي  $Z$  الذي يتبع التوزيع الطبيعي المعياري يتميز بأن وسطه الحسابي يساوي الصفر وانحرافه المعياري يساوي الواحد الصحيح ، ويمكن استخدام جدول منحنى التوزيع الطبيعي المعياري في حساب الاحتمالات المختلفة لتنفيذ المشروع في أي وقت مستهدف بسهولة ، ولبيان كيفية استخدام جدول التوزيع الطبيعي المعياري في حساب الاحتمالات المختلفة دعنا نأخذ المثال التالي :

مثال (٢) :

إذا كان  $Z$  متغيراً عشوائياً يتبع التوزيع الطبيعي المعياري ، فباستخدام جدول التوزيع الطبيعي المعياري أوجد الاحتمالات الآتية :

(\*) نظرية التزعة المركزية :

إذا كان  $x_1, x_2, \dots, x_n$  مجموعة من المتغيرات العشوائية المستقلة ، فإن المجموع الجبري لهذه المتغيرات وليكن  $Z$  حيث :

$$Z = x_1 + x_2 + \dots + x_n$$

سوف يتبع بشكل تقريبي التوزيع الطبيعي وذلك بزيادة قيمة  $n$  زيادة كبيرة ، أي عندما  $n$  تؤول إلى  $\infty$  وذلك بغض النظر عن التوزيع الاحتمالي الأصلي للمتغيرات العشوائية  $x_i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, n$ )

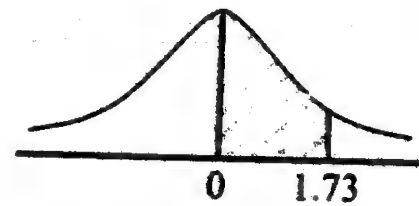
1.  $P(0 \leq Z \leq 1.73)$
2.  $P(Z \geq -0.86)$
3.  $P(1 \leq Z \leq 2.35)$
4.  $P(-1.34 \leq Z \leq 0.49)$
5.  $P(Z \geq 0.41)$

حيث  $P$  اختصار لكلمة Probability وهي تعني احتمال .

الحل :

1.  $P(0 \leq Z \leq 1.73)$

$= 0.4582.$



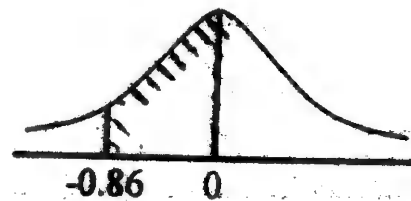
حيث ندخل الجدول وفق الصف 1.7 والعمود 0.03

2.  $P(Z \geq -0.86)$

$= 0.5 + P(-0.86 \leq Z \leq 0)$

$= 0.5 + P(0 \leq Z \leq 0.86)$

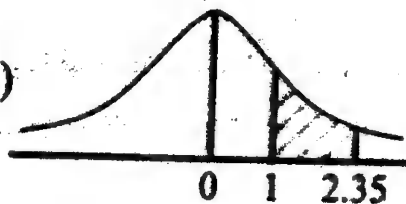
$= 0.5 + 0.3051 = 0.8051.$



3.  $P(1 \leq Z \leq 2.35)$

$= P(0 \leq Z \leq 2.35) - P(0 \leq Z \leq 1)$

$= 0.4906 - 0.3413 = 0.1493.$



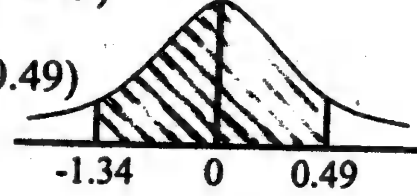


$$4. P(-1.34 \leq Z \leq 0.49)$$

$$= P(-1.34 \leq Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 0.49)$$

$$= P(0 \leq Z \leq 1.34) + P(0 \leq Z \leq 0.49)$$

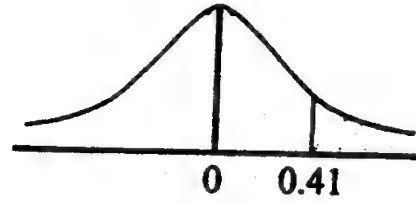
$$= 0.4099 + 0.1879 = 0.5978.$$



$$5. P(Z \geq 0.41)$$

$$= 0.5 - P(0 \leq Z \leq 0.41)$$

$$= 0.5 - 0.1591 = 0.3409.$$



مثال (٣) :

الجدول التالي يوضح مجموعة من الأنشطة اللازمة لتنفيذ أحد مشروعات

تطوير منتج معين وتتابعها والتقدير الزمنية (بالشهور) لكل نشاط :

النشاط	النشاط السابق	وقت تنفيذ النشاط (بالشهور)		
		المتفائل	الأكثر احتمالاً	المتشائم
C	لا يوجد	5.5	8	10.5
D	لا يوجد	2	4.5	10
E	C	1	2	3
F	C	6.5	8	21.5
G	C	1	4	7
H	D, E	10	11	18
I	F	4	5	12
J	F	5	7	9
K	G	4	8	12
L	H, I	7	10	31
N	J, K	10	13	28

## المطلوب :

- ١ - حساب الزمن المتوقع والتباين لكل نشاط .
- ٢ - رسم شبكة الأعمال وتحديد المسار الحرج والزمن المتوقع لإتمام المشروع .
- ٣ - تصوير الخريطة الزمنية للمشروع موضحاً بها الوقت الراكد بمستوياته الثلاث لكل نشاط .
- ٤ - حساب الاحتمالات الآتية :

- أ - احتمال تنفيذ المشروع في نهاية ثلاث سنوات على الأقل .
- ب - احتمال تنفيذ المشروع في فترة تتراوح ما بين 43 ، 48 شهراً .

## الحل :

- ١ - لحساب الوقت المتوقع والتباين لكل نشاط سوف نرمز - كما سبق أن بينا - للوقت المتفائل بالرمز  $A$  ، الوقت الأكثر احتمالاً بالرمز  $M$  ، الوقت المتشائم بالرمز  $B$  ، والوقت المتوقع للنشاط  $(i - j)$  بالرمز  $t_{ij}$  ، التباين للنشاط  $(i - j)$  بالرمز  $\sigma_{ij}^2$  فإن :

$$t_{ij} = \frac{A_{ij} + 4M_{ij} + B_{ij}}{6}$$

$$\sigma_{ij}^2 = \left( \frac{B_{ij} - A_{ij}}{6} \right)^2$$

فعلى سبيل المثال ، بالنسبة للنشاط  $C$  لو (1 - 2) يلاحظ أن :

$$t_{12} = \frac{5.5 + 4(8) + 10.5}{6} = 8 \text{ (شهور)}$$

$$\sigma_{12}^2 = \left( \frac{10.5 - 5.5}{6} \right)^2 = \frac{25}{36}$$

وأيضاً بالنسبة للنشاط D أو (3 - 1) يلاحظ أن :

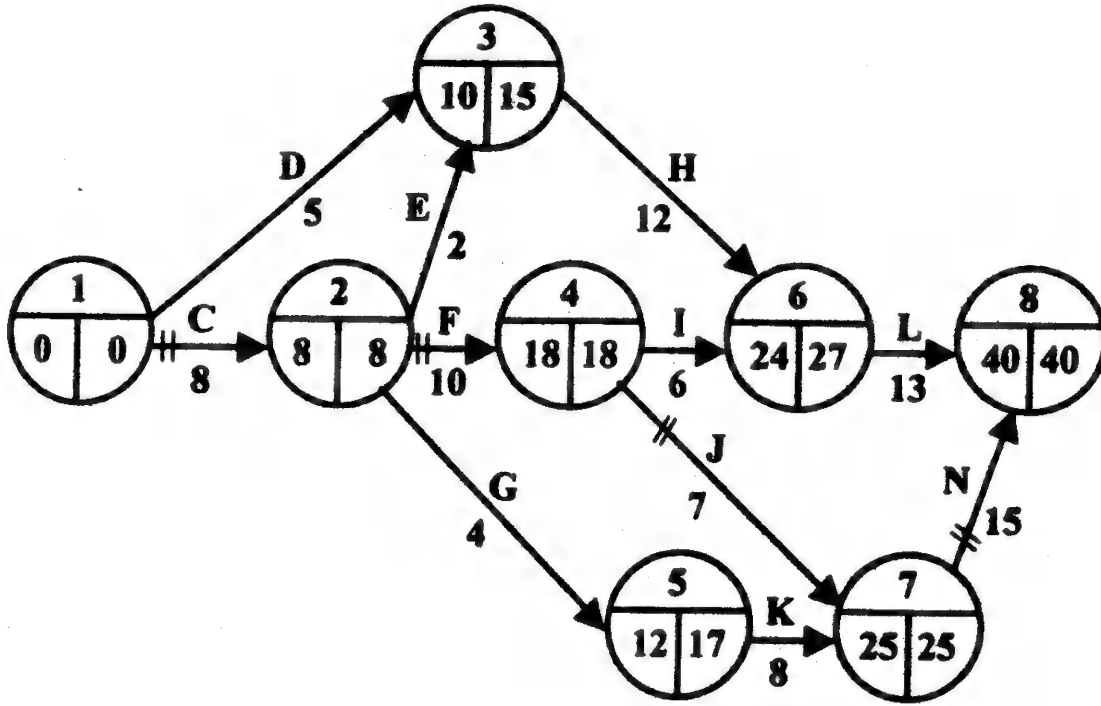
$$t_{13} = \frac{2 + 4(4.5) + 10}{6} = 5 \text{ (شهور)}$$

$$\sigma_{13}^2 = \left( \frac{10 - 2}{6} \right)^2 = \frac{64}{36}$$

وهكذا بالنسبة لباقي أنشطة المشروع كما يتضح بالجدول التالي :

النشاط	مسار النشاط (i-j)	النشاط السابق	وقت تنفيذ النشاط بالشهور			الوقت المتوقع $t_{ij}$	التباين $\sigma_{ij}^2$	
			المتفائل $A_{ij}$	الأكثر احتمالاً $M_{ij}$	المتشائم $B_{ij}$			
C	(1-2)	لا يوجد	5.5	8	10.5	8	25/36	*
D	(1-3)	لا يوجد	2	4.5	10	5	64/36	
E	(2-3)	C	1	2	3	2	4/36	
F	(2-4)	C	6.5	8	21.5	10	225/36	*
G	(2-5)	C	1	4	7	4	36/36	
H	(3-6)	D, E	10	11	18	12	64/36	
I	(4-6)	F	4	5	12	6	64/36	
J	(4-7)	F	5	7	9	7	16/36	*
K	(5-7)	G	4	8	12	8	64/36	
L	(6-8)	H, I	7	10	31	13	576/36	*
N	(7-8)	J, K	10	13	28	15	324/36	

## ٢ - رسم شبكة الأعمال :



وكما هو واضح فإن المسار الحرج يتكون من الأنشطة C ، F ، J ، N  
 أو الأنشطة (1 - 2) ، (2 - 4) ، (4 - 7) ، (7 - 8) . ويكون الوقت المتوقع  
 لإتجاز المشروع = طول المسار الحرج = 40 شهرا .

٣ - يتم تصوير الخريطة الزمنية والوقت الراكد بمستوياته الثلاث لأنشطة  
 المشروع من خلال الجدول التالي :

النشاط	مسار النشاط (i-j)	الوقت المتوقع (بالشهور) $t_e$	الوقت المبكر		الوقت المتأخر		الوقت الراكد		
			البداية $ES_i$	النهاية $EF_{ij}$	البداية $LS_{ij}$	النهاية $LS_j$	الإجمالي $TF_{ij}$	الحر $FF_{ij}$	المستقل $IF_{ij}$
C	(1-2)	8	0	8	0	8	0	0	0
D	(1-3)	5	0	5	10	15	10	5	5
E	(2-3)	2	8	10	13	15	5	0	0
F	(2-4)	10	8	18	8	18	0	0	0
G	(2-5)	4	8	12	13	17	5	0	0
H	(3-6)	12	10	22	15	27	5	2	-3
I	(4-6)	6	18	24	21	27	3	0	0
J	(4-7)	7	18	25	18	25	0	0	0
K	(5-7)	8	12	20	17	25	5	5	0
L	(6-8)	13	24	37	27	40	3	3	0
N	(7-8)	15	25	40	25	40	0	0	0

٤ - احتمالات تنفيذ المشروع :

نفرض أن الزمن المستهدف لإنجاز المشروع هو المتغير العشوائي T

أ - الزمن المستهدف لإنجاز المشروع هو :  $T = 3$  سنوات = 36 شهراً

الزمن المتوقع لإنجاز المشروع هو :  $\mu$  = طول المسار الحرج = 40 شهراً

الانحراف المعياري لوقت إنجاز المشروع هو  $\sigma$  ، حيث :

$$\sigma = \sqrt{\text{مجموع تباينات الأنشطة الحرجة}} = \sqrt{\frac{25}{36} + \frac{225}{36} + \frac{16}{36} + \frac{576}{36}}$$

$$= 4.84 \text{ (شهراً)}$$

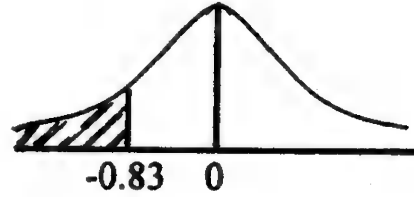
إذن :

احتمال تنفيذ المشروع في 3 سنوات على الأكثر يحسب كما يلي :

$$P(T \leq 36) = P\left(\frac{T - \mu}{\sigma} \leq \frac{36 - \mu}{\sigma}\right)$$

$$= P\left(Z \leq \frac{36 - 40}{4.84}\right) =$$

$$= P(Z \leq -0.83)$$



$$= 0.5 - P(-0.83 \leq Z \leq 0)$$

$$= 0.5 - P(0 \leq Z \leq 0.83)$$

$$= 0.5 - 0.2967 = 0.2033$$

حيث نلاحظ أن :

$$P(-0.83 \leq Z \leq 0) = P(0 \leq Z \leq 0.83)$$

وذلك لأن منحنى التوزيع الطبيعي المعياري متماثل حول خط الوسط وهو

$$\mu = 0$$

وللحصول على القيمة الاحتمالية :  $P(0 \leq Z \leq 0.83)$  من

جدول التوزيع الطبيعي المعياري ندخل الجدول وفق الصف 0.8 والعمود

0.03 فنجد عند ملتقاهما القيمة 0.2967

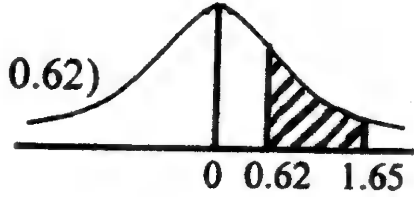
ب - احتمال تنفيذ المشروع في فترة زمنية تتراوح بين 43 ، 48 شهراً هو :

$$P(43 \leq T \leq 48) = P\left(\frac{43 - 40}{4.84} \leq \frac{T - 40}{4.84} \leq \frac{48 - 40}{4.84}\right)$$

$$= P(0.62 \leq Z \leq 1.65)$$

$$= P(0 \leq Z \leq 1.65) - P(0 \leq Z \leq 0.62)$$

$$= 0.5405 - 0.2324 = 0.3081$$



### (٢-٢-٥) تحليل الوقت / تكلفة في شبكات الاعمال

#### Time / Cost Analysis in Activity Networks

مما لا شك فيه أن أسلوب المسار الحرج وبيرت ركزا الاهتمام في بداية الأمر على عنصر الزمن ، واعتبر أن عنصر الزمن هو المقياس الوحيد للفعالية والرقابة في برمجة المشروعات ، إلا أن تنفيذ أنشطة المشروع لا تتطلب فترة زمنية فحسب بل تحتاج أيضا إلى موارد مادية يمكن التعبير عنها في صورة تكلفة محددة . وفي معظم الحالات فإن تكلفة إنجاز النشاط تعتمد على الوقت اللازم لتنفيذه ، وبالتبعية ، فإن تكلفة إنجاز المشروع ككل سوف تعتمد على وقت الإنجاز الكلي للمشروع بحيث إذا زادت كمية الموارد المخصصة لتنفيذ المشروع سيؤدي ذلك بالقطع إلى خفض الزمن اللازم لإتمام المشروع والعكس صحيح .

لذلك تم بناء شبكات الأعمال للتكلفة بنفس أسلوب بناء شبكات الأعمال للزمن وذلك بهدف إيجاد نوع من التوازن بين التكاليف اللازمة وأوقات التنفيذ المتفاوتة للأنشطة المختلفة بغية تحقيق الجدولة المثلى لأنشطة المشروع .

#### ١ - عناصر التكاليف :

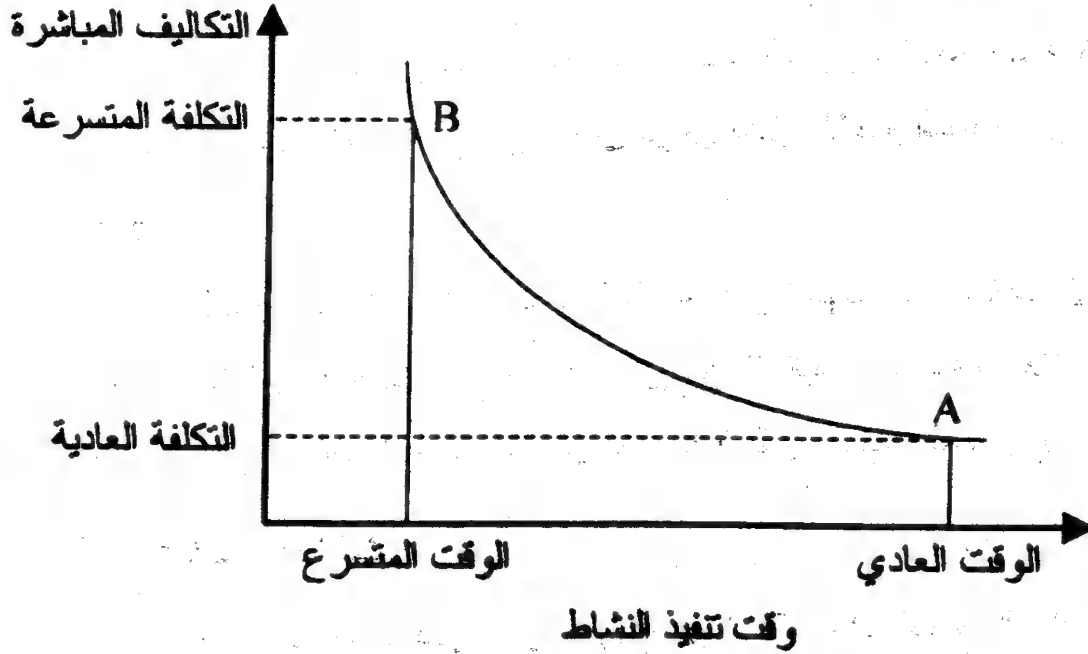
تتكون التكاليف الكلية لأي مشروع من التكاليف المباشرة والتكاليف غير

المباشرة المستخدمة في التنفيذ .

## أ - التكاليف المباشرة :

تعتبر التكاليف المباشرة هي التكاليف التي تعتمد مباشرة على كمية الموارد المستخدمة في تنفيذ الأنشطة المختلفة للمشروع مثل تكلفة المواد الخام وتكلفة تشغيل أو تأجير الآلات وتكلفة العمالة اللازمة لتنفيذ النشاط ، وإذا كان تنفيذ النشاط يتم من خلال عقود من الباطن فإن قيمة هذه العقود بالكامل تعتبر تكاليف مباشرة لتنفيذ النشاط .

ومما لا شك فيه أن العلاقة بين التكلفة المباشرة ووقت تنفيذ النشاط علاقة عكسية كما يتضح في شكل (٥ - ١٠) حيث يتناقص وقت إنجاز النشاط بزيادة التكاليف المباشرة لهذا النشاط . وفي هذا الإطار يتم عمل تقديرات متعددة لتكلفة كل نشاط تناظر أزمنة مختلفة لإنجاز هذا النشاط بدرجات ثقة معينة ، هذه التقديرات تتراوح بين مستويين هما :



شكل (٥ - ١٠)

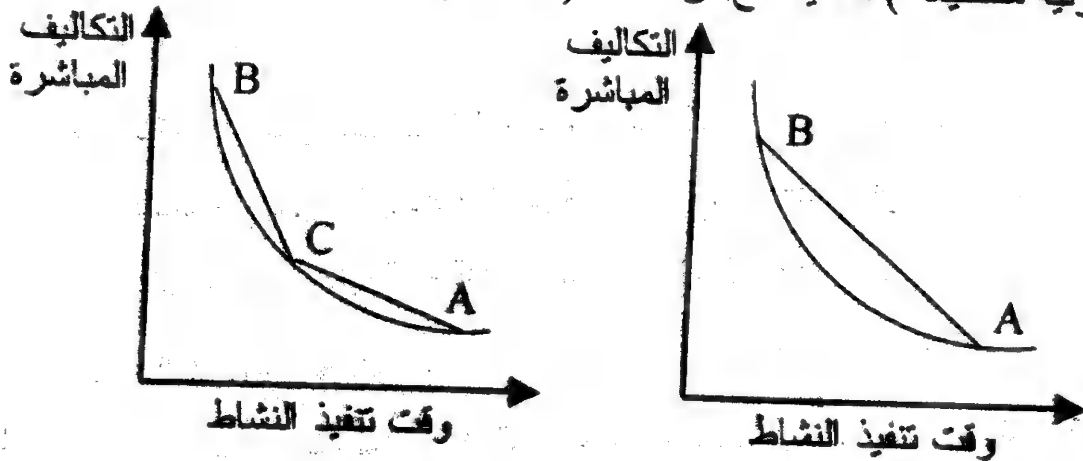


المستوى العادي : وهو يمثل الحد الأقصى لوقت تنفيذ النشاط والحد الأدنى للتكاليف المباشرة اللازمة للتنفيذ في ظل الظروف العادية ، ويمثله على المنحنى النقطة A . وكما يتضح من الشكل السابق فإذا حدث زيادة في وقت تنفيذ النشاط عن هذا المستوى ( أي بعد النقطة A ) فإن الخفض الحادث في التكاليف المباشرة نتيجة لذلك سوف يكون طفيفاً جداً .

المستوى المتسرع : وهو يمثل الحد الأدنى لوقت تنفيذ النشاط والحد الأقصى للتكاليف المباشرة التي يمكن تكثيفها لتنفيذ النشاط ويمثله على المنحنى النقطة B .

وكما هو واضح من الشكل السابق فإن أي تخفيض - ولو طفيف - في وقت تنفيذ النشاط عن هذا المستوى ( أي قبل النقطة B ) سوف يستتبع ذلك زيادة كبيرة في التكاليف المباشرة .

وتسهيلاً للحسابات سوف يتم تقريب المنحنى الذي يمثل العلاقة بين وقت تنفيذ النشاط والتكاليف المباشرة إلى خط مستقيم واحد ( وأحياناً عدة خطوط جزئية مستقيمة ) كما يتضح من الشكل ( ٥ - ١١ ) .



شكل ( ٥ - ١١ )

وميل هذا الخط المستقيم سوف يشير إلى الزيادة في التكاليف المباشرة نتيجة خفض وقت تنفيذ النشاط بوحدة زمن واحدة ويسمى الميل بميل التكلفة ، وبحسب ميل التكلفة للنشاط كما يلي :

$$\text{ميل التكلفة للنشاط} = \frac{\text{مقدار التغير في التكلفة للنشاط}}{\text{مقدار التغير في وقت تنفيذ النشاط}}$$

$$= \frac{\text{التكلفة المتسارعة} - \text{التكلفة العادية}}{\text{الوقت العادي} - \text{الوقت المتسارع}}$$

#### ب - التكاليف غير المباشرة :

التكاليف غير المباشرة هي التكاليف التي لا يوجد بينها وبين أنشطة المشروع علاقة مباشرة ، وتنقسم التكاليف غير المباشرة إلى تكاليف غير مباشرة ثابتة وتكاليف غير مباشرة متغيرة .

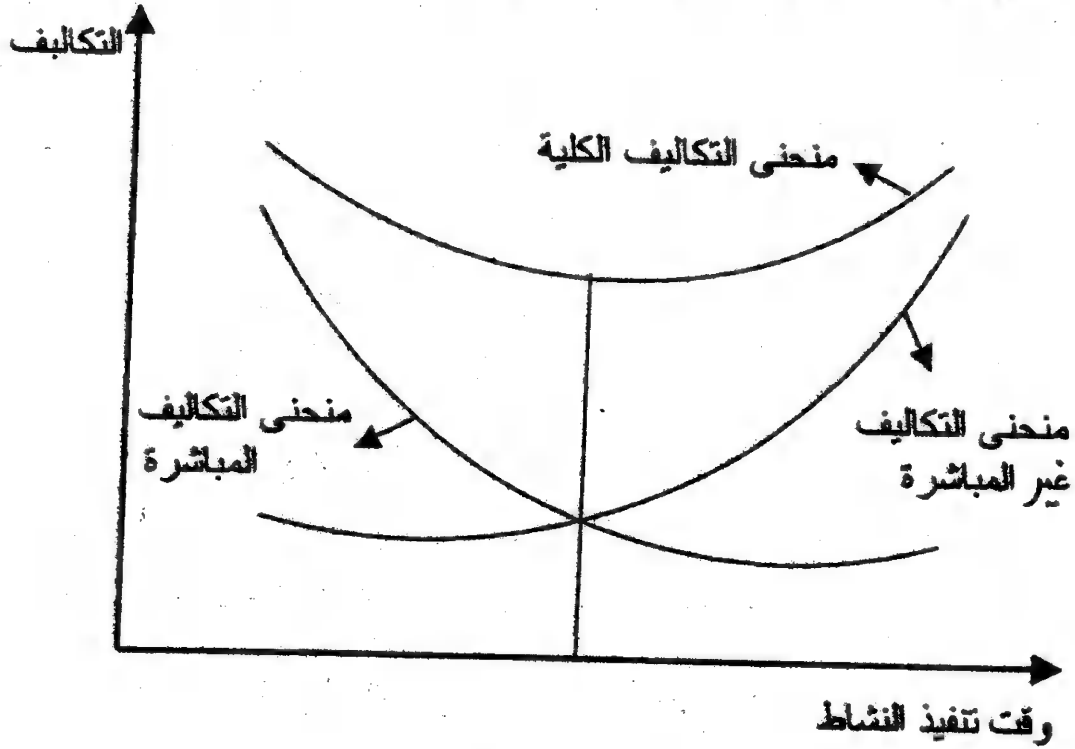
- التكاليف غير المباشرة الثابتة : هي التكاليف التي لا تتوقف على مدى التقدم في إنجاز المشروع ، وتضم المصروفات الإدارية والعامة والتأمين والضرائب .

- التكاليف غير المباشرة المتغيرة : هي التكاليف التي تتوقف على وقت تنفيذ المشروع في شكل دالة طردية ، وتتمثل في تكلفة التمويل وتكلفة الإشراف على التنفيذ والإهلاك والفائدة على رأس المال ... الخ .

#### ج - التكاليف الإجمالية :

تمثل التكاليف الإجمالية مجموع عناصر التكاليف المباشرة وغير المباشرة ( سواء كانت ثابتة أم متغيرة ) ، فإذا كانت علاقة التكاليف المباشرة

بوقت تنفيذ النشاط علاقة عكسية ، ولما كانت علاقة التكاليف غير المباشرة ووقت تنفيذ النشاط علاقة طردية ، فإن العلاقة بين التكاليف الكلية ووقت تنفيذ النشاط هي محصلة هذين الاتجاهين المتضادين كما يتضح من الشكل (٥ - ١٢) :



شكل (٥ - ١٢)

#### ب - اختزال زمن المشروع :

تحليل عنصر التكلفة في شبكات الأعمال يهدف إلى الوصول إلى الحد الأدنى لوقت إنجاز المشروع بأقل زيادة ممكنة في التكاليف العادية ( الطبيعية ) ، ويتم ذلك من خلال عدة خطوات نوردتها فيما يلي :

- ١ - تحديد المستويين العادي والمتسرع لوقت تنفيذ النشاط والتكلفة المباشرة وغير المباشرة لكل مستوى منهما .

- ٢ - حساب ميل التكلفة المباشرة لكل نشاط وفقاً للعلاقة السابق الإشارة إليها .
  - ٣ - تحديد المسار الحرج وفقاً لأوقات التنفيذ العادية للأنشطة .
  - ٤ - يتم اختزال زمن المشروع وذلك باختصار أزمان أنشطة المسار الحرج فقط ، ولكي يتم اختزال الزمن بأقل تكلفة ممكنة ، نبدأ باختيار النشاط الذي له أقل ميل تكلفة مباشرة من بين الأنشطة الواقعة على المسار الحرج ونضغط زمن هذا النشاط ، ويتم تحديد مستوى الضغط أو التعجيل على أساس اختيار القيمة الأقل من بين الحد الأقصى المتاح لتعجيل النشاط موضع الاختيار ( وهو الفرق بين الوقتين العادي والمتسرع ) وأقل قيمة للوقت الراكد الحر للأنشطة غير الحرجة ، أي أن :  
 حدود ضغط ( أو تعجيل ) النشاط = الأصغر من ( الحد الأقصى المتاح لضغط النشاط ، أقل وقت راكد حر للأنشطة غير الحرجة ) .
  - ٥ - يتم تحديد المسار الحرج من جديد وتكرر الخطوة رقم (٤) إلى أن يتم ضغط جميع الأنشطة الحرجة والتي لها ميل تكلفة أقل من أو يساوي التكلفة غير المباشرة . وفي هذه الحالة نصل إلى الحد الأدنى لوقت تنفيذ المشروع بأقل زيادة ممكنة في التكاليف الطبيعية .
- ويلاحظ أنه في حالة ظهور أكثر من مسار حرج في شبكة الأعمال - خلال جولات الحل - فنبدأ باختيار الأنشطة المشتركة بين المسارات الحرجة ويتم تعجيلها وفقاً للخطوة رقم (٤) ، وفي حالة عدم وجود أنشطة مشتركة بين المسارات الحرجة فيتم تعجيل نشاط على كل مسار حرج حتى يمكن تخفيض الوقت الإجمالي لتنفيذ المشروع .

مثال (٤) :

اعتبر الجدول التالي الذي يبين الأنشطة الضرورية لتنفيذ أحد المشروعات وتتابعها الفني والمنطقي والمستويين العادي والمتسرع لوقت تنفيذ الأنشطة (بالشهور) وكذلك التكلفة المباشرة وغير المباشرة (بالألف جنيه) المرتبطة بكل منهما :

النشاط	مسار النشاط (i-j)	النشاط السابق	المستوى العادي		المستوى المتسرع	
			وقت	تكلفة مباشرة	وقت	تكلفة مباشرة
A	(1-2)	لا يوجد	8	100	6	116
B	(1-3)	لا يوجد	13	150	10	162
C	(2-4)	A	5	60	3	72
D	(2-5)	A	14	115	10	135
E	(3-4)	B	6	65	3	83
F	(4-5)	C, E	6	40	3	70
G	(4-6)	D, F	8	84	6	98
H	(5-6)	C, E	7	57	6	60

إجمالي التكاليف المباشرة = 671 ألف جنيه

التكاليف غير المباشرة المتغيرة = 2 (الفان جنيه) شهرياً

التكاليف غير المباشرة الثابتة = 15 ألف جنيه .

المطلوب :

١ - حساب ميل التكلفة لكل نشاط ورسم شبكة الأعمال وتحديد الوقت العادي

للإزم لتنفيذ المشروع والتكلفة الإجمالية للتنفيذ في هذه الحالة .

- ٢ - اختزال وقت تنفيذ المشروع بمقدار 8 شهور بحيث تتحقق أقل زيادة ممكنة في التكاليف .

الحل :

- ١ - يتم حساب ميل التكلفة لكل نشاط وفقاً للعلاقة التالية :

$$\text{ميل التكلفة} = \frac{\text{التكلفة المتسارعة} - \text{التكلفة العادية}}{\text{الوقت العادي} - \text{الوقت المتسارع}}$$

$$\frac{116 - 100}{8 - 6} = 8 \quad \text{ميل التكلفة للنشاط A هو :}$$

$$\frac{162 - 150}{13 - 10} = 4 \quad \text{ميل التكلفة للنشاط B هو :}$$

$$\frac{72 - 60}{5 - 3} = 6 \quad \text{ميل التكلفة للنشاط C هو :}$$

$$\frac{135 - 115}{14 - 10} = 5 \quad \text{ميل التكلفة للنشاط D هو :}$$

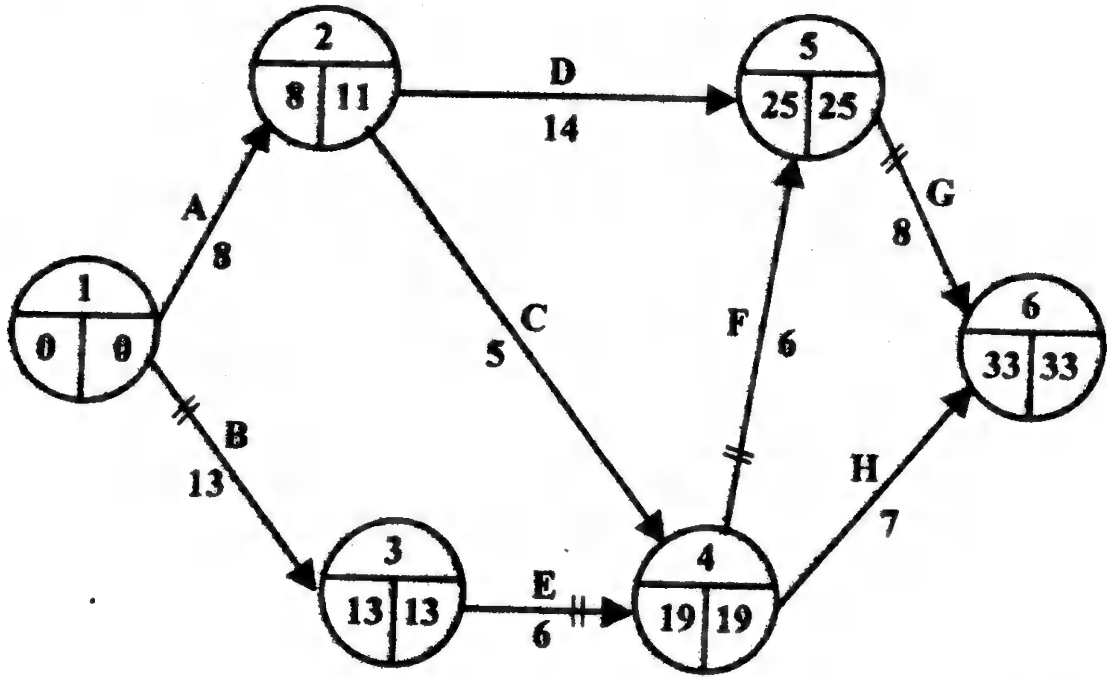
$$\frac{83 - 65}{6 - 3} = 6 \quad \text{ميل التكلفة للنشاط E هو :}$$

$$\frac{70 - 40}{6 - 3} = 10 \quad \text{ميل التكلفة للنشاط F هو :}$$

$$\frac{98 - 84}{8 - 6} = 7 \quad \text{ميل التكلفة للنشاط G هو :}$$

$$\frac{60 - 57}{7 - 6} = 3 \quad \text{ميل التكلفة للنشاط H هو :}$$

وتكون شبكة الأعمال للمشروع وفقاً للأوقات العادية على النحو التالي :



٢ - فيما يلي جولات اختزال وقت تنفيذ المشروع :

١ - الجولة الأولى :

المسار الحرج يتكون من الأنشطة : B ، E ، F ، G أو ( 1 - 3 ) ، ( 3 - 4 ) ، ( 4 - 5 ) ، ( 5 - 6 ) ويستغرق المشروع 33 شهراً .

للتكلفة الإجمالية = التكلفة المباشرة + التكاليف غير المباشرة

وتحسب كما يلي :

$$671 + 2(33) + 15 = 752 \text{ ( ألف جنيه )}$$

ب - الجولة الثانية :

يتم اختيار النشاط الحرج الذي له أقل ميل تكلفة مباشرة وهو النشاط B

أو ( 1 - 3 ) ويتم البدء في تعجيله ، ولتحديد مدى الضغط نلاحظ أن :

الحد الأقصى المتاح لتعجيل النشاط  $B = 3$  (وهو الفرق بين الوقت العادي والوقت المتسرع)

الوقت الراكد الحر للأنشطة غير الحرجة وهي:  $H, D, C, A$  يساوي، على الترتيب،  $0, 6, 3, 7$ ، وبالتالي فإن:

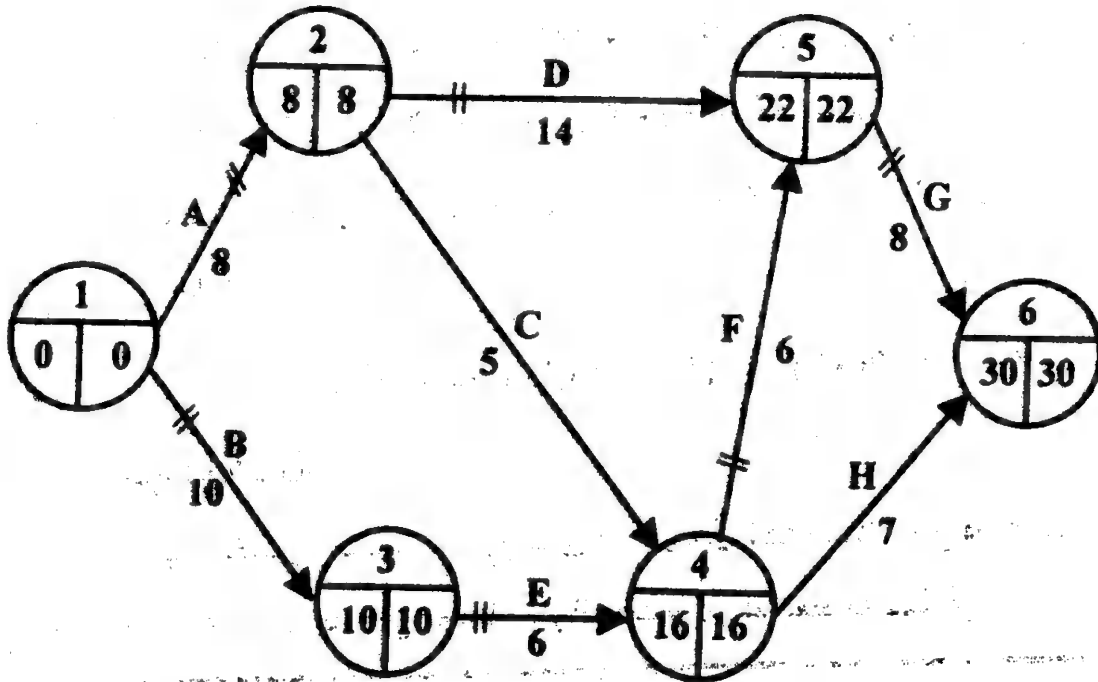
أصغر وقت راكد حر للأنشطة غير الحرجة (بعد استبعاد القيمة 0)

$$3 =$$

وتكون حدود الضغط هي:

$$\text{Min}(3, 3) = 3$$

لذلك يتم تخفيض زمن النشاط  $B$  بمقدار 3 شهور، أي يتم تنفيذ النشاط  $B$  في 10 شهور بدلاً من 13 شهراً، وتصبح شبكة الأعمال في هذه الجولة كما يلي:





تم تخفيض وقت تنفيذ المشروع الكلي من 33 إلى 30 شهراً ، بزيادة  
في التكاليف المباشرة قدرها  $12 = (3 \times 4)$  ، بينما نتج عن هذا الخفض نقص  
في التكاليف غير المباشرة قدرها  $6 = (3 \times 2)$  ، ومن ثم فإن :

التكاليف الإجمالية = التكاليف المباشرة + التكاليف غير المباشرة

وتحسب كما يلي :

$$(671 + 12) + 2(30) + 15 = 758 \text{ ( ألف جنيه )}$$

جـ - الجولة الثالثة :

تحتوي شبكة الأعمال الآن على مسارين حرجيين هما :

المسار الحرج الأول مكون من الأنشطة A ، D ، G

المسار الحرج الثاني مكون من الأنشطة B ، E ، F ، G

وبالطبع فإن طول المسارين متساوي ويساوي 30 شهراً ، وحيث أنه  
يوجد نشاط حرج مشترك بين هذين المسارين وهو النشاط G ، لذلك يتم  
تخفيض وقت تنفيذ النشاط G . ولتحديد مدى التخفيض أو الضغط في زمن  
هذا النشاط نلاحظ ما يلي :

الحد الأقصى المتاح لتعجيل النشاط  $G = 2$  ( وهو الفرق بين الوقت  
العادي والوقت المتسرع )

الوقت الراكد الحر للأنشطة غير الحرجة وهما النشاطين C ، H وهو  
يساوي 3 ، 7 على الترتيب ،

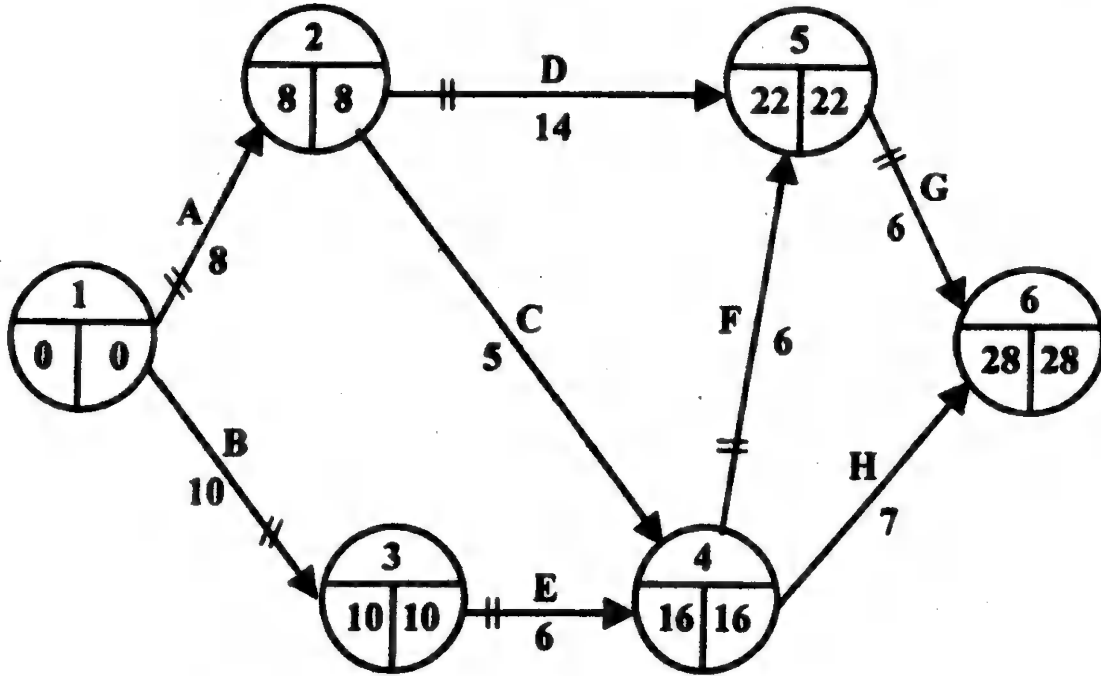
ويكون أصغر وقت راكد حر للأنشطة غير الحرجة = 3 ،

إنن :

حدود ضغط النشاط G هي :

$$\text{Min } (2, 3) = 2$$

يتم تخفيض وقت النشاط G بمقدار شهرين حيث يتم تنفيذه في 6 شهور بدلاً من 8 شهور وتصبح شبكة الأعمال في هذه الجولة كما يلي :



تم تخفيض وقت إنجاز المشروع الكلي من 30 إلى 28 شهراً ، أي بمقدار شهرين بزيادة في التكاليف المباشرة قدرها  $(2 \times 7) = 14$  ، بينما نقصت التكاليف غير المباشرة بمقدار  $(2 \times 2) = 4$  ، ومن ثم فإن :

$$\text{التكاليف الإجمالية} = \text{التكاليف المباشرة} + \text{التكاليف غير المباشرة}$$

وتحسب كما يلي :

$$(671 + 12 + 14) + 2(28) + 15 = 768 \text{ ( ألف جنيه )}$$

د - الجولة الرابعة :

يوجد الآن مسارين حرجيين هما :

المسار الحرج الأول مكون من الأنشطة A ، D ، G

المسار الحرج الثاني مكون من الأنشطة B ، E ، F ، G

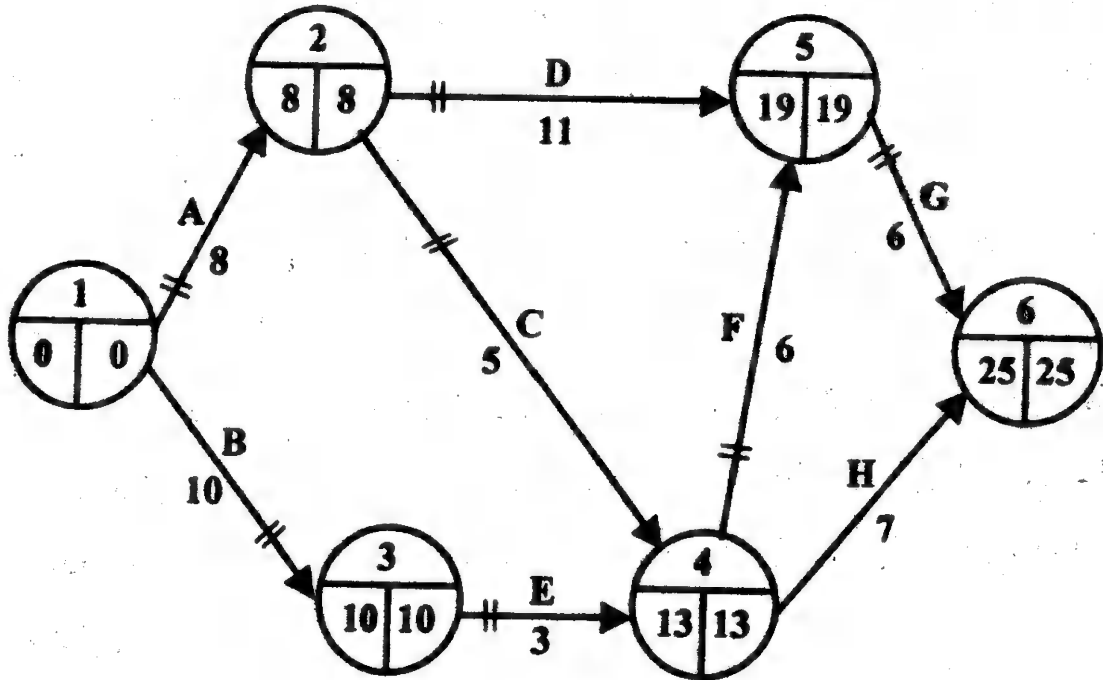
ونلاحظ أنه لم يعد بين المسارين الحرجيين نشاط حرج مشترك ، وذلك لأن النشاط الحرج المشترك بينهما وهو النشاط G تم تخفيضه إلى المستوى المتسرع له ومن ثم لم يعد قابلاً للتخفيض .

في هذه الحالة يتم تخفيض كل مسار من المسارين الحرجيين بنفس القدر ، حيث نجد أن :

في المسار الحرج الأول يتم اختيار نشاط من النشاطين A ، D وفقاً لقيمة ميل التكلفة لكل منهما ، حيث يتم اختيار النشاط D لأن له أقل ميل تكلفة ، وهو يقبل الضغط في حدود 4 شهور ( الفرق بين وقت التنفيذ العادي والمتسرع ) .

وفي المسار الحرج الثاني يتم اختيار نشاط من النشاطين E ، F فقط ( لأن النشاطين B ، G تم تخفيض وقت كل منهما إلى المستوى المتسرع ) ثم يختار النشاط E لأن له أقل ميل تكلفة ، وهو يقبل الضغط في حدود 3 شهور ( الفرق بين وقت التنفيذ العادي والمتسرع ) ، كما أن الوقت الراكد الحر للأنشطة غير الحرجة وهما C ، H يساوي ، على الترتيب ، 3 ، 5 .

وحيث أن المطلوب هو تخفيض وقت تنفيذ المشروع الآن بمقدار 3 شهور ( حتى يتحقق الخفض المطلوب في وقت إنجاز المشروع الكلي بمقدار 8 شهور ) ، لذلك سوف يتم تخفيض وقت تنفيذ كل من النشاطين D ، E بمقدار 3 شهور ، حيث يتم تنفيذ النشاط D في 11 شهراً بدلاً من 14 شهراً ، ويتم تنفيذ النشاط E في 3 شهور بدلاً من 6 شهور ، وتصبح شبكة الأعمال للمشروع كما يلي :



تم تخفيض وقت تنفيذ المشروع من 28 إلى 25 شهراً أي بمقدار 3 شهور ، بزيادة في التكاليف المباشرة قدرها :

$$3 \times 5 + 3 \times 6 = 33 \text{ ( ألف جنيه )}$$

بينما نقصت التكاليف غير المباشرة بمقدار

$$2 \times 3 = 6 \text{ ( آلاف جنيه )}$$

ومن ثم فإن :

التكاليف الإجمالية تحسب كما يلي :

$$(671 + 12 + 14 + 33) + 2(25) + 15 = 795 \text{ ( ألف جنيه )}$$

ويمكن تلخيص النتائج السابقة في الجدول التالي :

الجدولة	النشاط المعجل	الوقت المضغوط	الوقت الإجمالي للمشروع (بالشهور)	التكاليف (بالألف جنيه)			
				المباشرة	غير المباشرة		الإجمالية
					المتغيرة	الثابتة	
الأولى	لا يوجد	-	33	671	66	15	752
الثانية	B	3	30	683	60	15	758
الثالثة	G	2	28	697	56	15	768
الرابعة	D ، E	3	25	730	50	15	795

ملاحظات :

- ١ - تحليل الوقت / تكلفة بشبكة الأعمال يبدأ في الجدولة الأولى باعتبار المستوى العادي لكل من وقت التنفيذ وتكلفة التنفيذ لكافة الأنشطة بالشبكة ولذلك يتم تحديد المسار الحرج الطبيعي في هذه الجدولة .
- ٢ - يمكن الاستمرار في عملية تخفيض وقت تنفيذ الأنشطة بالشبكة من خلال الاستمرار في جولات الحل المختلفة وذلك إما للوصول إلى وقت تنفيذ مستهدف مضغوط للمشروع يرغب متخذو القرار في الوصول إليه ، كما في المثال السابق ، حيث كان الهدف هو اختزال وقت تنفيذ المشروع إلى

25 شهراً ، وإما أن يتم تخفيض كافة أنشطة المشروع إلى أزمنتها المتسعة دون أن يتم تحويل مسار حرج بشبكة الأعمال إلى مسار غير حرج ، ويكون البديل الأمثل لتنفيذ المشروع هو ذلك الذي يقابل أدنى تكلفة تنفيذ إجمالية من بين كافة البدائل وقت / تكلفة لتنفيذ المشروع .

٣ - يمكن استبعاد التكاليف غير المباشرة الثابتة من التحليل دون أن يؤثر ذلك على نتائج التحليل لأنها غير مرتبطة بوقت تنفيذ المشروع ، وهي تؤخذ فقط في الاعتبار لحساب التكاليف الإجمالية لتنفيذ المشروع .

٤ - تحليل وقت / تكلفة لشبكة الأعمال يمكن من التكيف بسرعة مع قيود الميزانية ، ففي المثال السابق يمكن - على سبيل المثال - أن نجيب على السؤال التالي :

ما هو الحد الأدنى لوقت تنفيذ المشروع إذا كانت الميزانية المخصصة للتنفيذ هي 768 ألف جنيه ؟

فإذا نظرنا إلى الجدول السابق الذي يلخص نتائج التخفيض لجولات الحل المختلفة ، نستطيع بسهولة أن نقرر أن الحد الأدنى المطلوب لوقت تنفيذ المشروع في ضوء هذه الميزانية هو 28 شهراً .

كما نستطيع بسهولة أيضاً الإجابة على أسئلة تطرح بصيغ عكسية ، فعلى سبيل المثال ، يمكن الإجابة على السؤال التالي :

ما هو الحد الأدنى لتكلفة إنجاز المشروع في 25 شهراً ؟

وتكون الإجابة ببساطة هي 795 ألف جنيه .

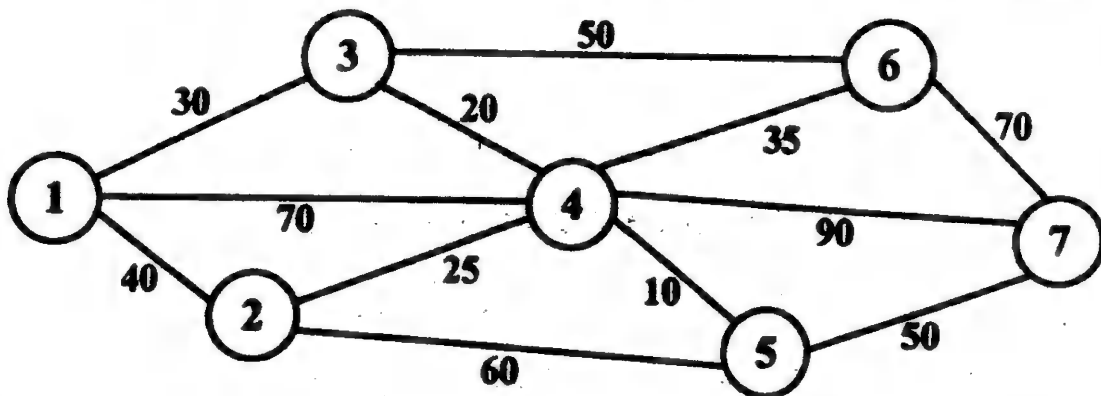
### (٢-٥) مشكلة أقصر طريق The Shortest - Route Problem

درسنا في الجزء السابق والخاص بشبكات الأعمال بنوعها : أسلوب المسار الحرج (CPM) وبيرت (PERT) أن الاهتمام يكون منصبا على تحديد المسار الحرج وهو أطول مسارات الشبكة طولا ( أو زمنا ) من حدث البداية إلى حدث النهاية . وإلى جانب شبكات الأعمال يوجد نوع آخر من الشبكات على جانب كبير من الأهمية من وجهة النظر العملية تسمى شبكات أقصر طريق .

في هذا نوع من الشبكات يرتبط بكل نشاط (i - j) من أنشطة الشبكة مسافة  $d_{ij}$  ( وربما يكون زمن انتقال  $t_{ij}$  أو تكلفة انتقال  $c_{ij}$  ) غير سالبة من الحدث i إلى الحدث j .

ويكون الهدف في شبكات أقصر طريق هو تحديد أقصر الطرق ( أو الطريق الأقل زمنا أو الأقل تكلفة ) من حدث البداية بالشبكة حتى أي حدث آخر بالشبكة .

فعلى سبيل المثال ، إذا كان هناك شبكة للطرق تربط بين سبع مدن وكانت المسافة بين كل مدينتين من تلك المدن بالكيلومتر موضحة كما يلي :



وبفرض أن تاجراً يرغب في السفر من المدينة 1 إلى المدينة 7 ، فإن مشكلة أقصر طريق تهتم بتحديد الطرق أو المسارات التي يجب أن يسلكها التاجر في سفره بحيث تكون مسافة الانتقال الكلية أصغر ما يمكن .

### طريقة تحديد أقصر طريق Shortest - Route Method

بفرض أن حدث البداية بالشبكة هو الحدث رقم 1 والذي نطلق عليه اسم المصدر Source Node ، وأن حدث النهاية بالشبكة هو الحدث رقم n والذي نطلق عليه اسم المصب Sink Node . فيتم تحديد أقصر طريق بالشبكة من حدث البداية 1 حتى حدث النهاية n باستخدام أسلوب التحديد أو التعيين Labeling Procedure ، وتتلخص هذه الطريقة في الخطوات التالية :

#### الخطوة 1 :

يتم توزيع جميع طرق ( أو أنشطة ) الشبكة تحت أحداثها مع مراعاة ما يلي :

- أ - نضع كل طريق ( أو نشاط ) أسفل حدث البداية الخاص به ، أي نضع الطريق ( i - j ) أسفل الحدث i ، حيث  $i, j \leq n$  .
- ب - نرتب الطرق ( أو الأنشطة ) أسفل كل حدث في ترتيب تصاعدي من حيث المسافة ( أو الزمن أو التكلفة ) .
- ج - يتم حذف أي طريق ( أو نشاط ) يكون حدث النهاية له هو الحدث رقم 1 ( أي حدث المصدر ) أو يكون حدث البداية له هو الحدث رقم n ( أي حدث المصب ) .



- د - نميز حدث البداية ( أو المصب ) بنجمة ويرفق به القيمة صفر ،  
أي يكتب  $1*(0)$  والصفر هنا يعني أن المسافة من حدث  
المصب إلى حدث المصب تساوي الصفر .

## الخطوة 2 :

يتم تحديد أقصر ( أو أرخص ) طريق ( أو نشاط ) يقع تحت حدث  
البداية ونضعه داخل دائرة لتمييزه ، وليكن الطريق  $(1 - i)$  ثم نميز حدث  
النهاية لهذا الطريق وهو الحدث  $i$  بنجمة ونرفق بهذا الحدث قيمة تساوي طول  
( أو تكلفة ) الطريق ( أو للنشاط ) ،  $(1 - i)$  ، أي يكتب  $i*(d_{1i})$  ، ثم تحذف  
بعد ذلك كل الطرق ( أو الأنشطة ) الأخرى التي يكون حدث النهاية لها هو  
الحدث  $i$  .

## الخطوة 3 :

إذا كان حدث النهاية المميز بنجمة هو حدث المصب ، أي هو  
 $n*(d_{jn})$  ، نذهب إلى الخطوة 5 ، وإذا لم يكن كذلك نذهب إلى الخطوة 4 .

## الخطوة 4 :

تحدد كل الأحداث المميزة بنجوم والتي يوجد تحتها طرق ( أو أنشطة )  
غير محاطة بدوائر ، وبالنسبة لكل حدث من هذه الأحداث يتم عمل الآتي :

- أ - نضيف القيمة المرفقة بكل حدث من هذه الأحداث إلى قيمة أقصر  
( أو أرخص ) طريق ( أو نشاط ) غير محاط بدائرة وموجود  
أسفل هذا الحدث ويرمز لأصغر مجموع من بين هذه المجاميع  
بالرمز D .

- ب - نحيط الطريق ( أو النشاط ) الذي ساهم في تحديد قيمة  $D$  بدائرة ، ونميز حدث النهاية لهذا الطريق ( أو النشاط ) بنجمة ونرفق بهذا الحدث القيمة  $D$  .
- ج - يتم حذف كل الطرق ( أو الأنشطة ) الأخرى التي يكون حدث النهاية لها هو آخر حدث تم تمييزه بنجمة .
- د - نذهب إلى الخطوة 3 .

## الخطوة 5 :

أقصر مسافة ( أو أقل تكلفة ) تكون هي القيمة المرافقة لحدث النهاية ( أو المصب ) ،  $n$  ، فإذا تم لحدث النهاية التمييز  $n^*(Z)$  ، فتكون  $Z$  هي قيمة أقصر طريق ( أو أقل تكلفة ) من حدث البداية 1 حتى حدث النهاية  $n$  .

يتم تحديد مسار أقصر طريق ( أو أقل تكلفة ) بشكل عكسي ابتداءً من حدث النهاية  $n$  وذلك بإضافة كل الطرق ( أو الأنشطة ) المحاطة بدوائر إلى المسار ، والتي تتبع كل أحداث النهاية لها هذا المسار .

وتجدر الإشارة إلى أن هذه الطريقة سوف تحدد أقصر الطرق من حدث البداية إلى جميع أحداث الشبكة في عدد من المحاولات يساوي  $(n - 1)$  .

وتتميز هذه الطريقة بأنها تمكن من تحديد أقصر طريق ( أو أصغر تكلفة ) من حدث البداية رقم 1 حتى أي حدث آخر بالشبكة ، فيمكن على سبيل المثال ، تحديد أقصر طريق ( أو أصغر تكلفة ) من حدث البداية 1 حتى أي حدث آخر بالشبكة وليكن الحدث  $k$  ، حيث  $k < n$  ، ففي هذه الحالة تتوقف الحسابات الخاصة بهذه الطريقة بمجرد تمييز الحدث  $k$  بنجمة وتحديد القيمة

•  $k^*(D_1)$  ، فتكون  $D_1$  هي قيمة أقصر طريق من الحدث 1 إلى الحدث  $k$  ،  
ولا داعي إذن لاستكمال الحسابات الخاصة بالأحداث التالية للحدث  $k$  .

وجدير بالذكر أن هذه الطريقة تعطي حلاً لأقصر طريق أو لأصغر تكلفة أو لأقل زمن بالشبكة ، فهي تستخدم فقط في حالة تدنية المعيار المستخدم بالشبكة . ومن ثم فلا يمكن استخدامها في حالة تعظيم المنافع أو الأرباح بالشبكة . وتشترط هذه الطريقة أن تكون جميع قيم أنشطة الشبكة غير سالبة ، فإذا كانت القيمة المرتبطة بكل نشاط بالشبكة عبارة عن تكلفة هذا النشاط ، فوجود تكلفة سالبة لأحد الأنشطة بالشبكة تعني الربح المرتبط بهذا النشاط ، ففي هذه الحالة فإن الطريقة المذكورة لا تصلح للتطبيق ، وتوجد طرق متقدمة لتحديد أقصر طريق ( أو أصغر تكلفة أو أقل زمن ) بالشبكة في حالة وجود بعض القيم السالبة لأحد أو لبعض الأنشطة بالشبكة ولكنها تخرج عن نطاق هذا المؤلف .

#### مثال (٥) :

شركة المقاولون العرب ( عثمان أحمد عثمان وشركاه ) لها مركز رئيسي بمدينة الإسماعيلية ، ولدى الشركة مشروعات إنشائية مختلفة في ستة مواقع للعمل ( بخلاف المركز الرئيسي ) في منطقة للقناة وسيناء . وتسير الشركة رحلات يومية مزدوجة لنقل العمالة والآلات والمواد الخام من المركز الرئيسي إلى مواقع العمل ذهاباً ثم العودة مرة أخرى إلى المركز الرئيسي .  
فإذا كانت المسافة ( بالكيلومتر ) بين المركز الرئيسي ومواقع العمل المختلفة موضحة بالجدول التالي :

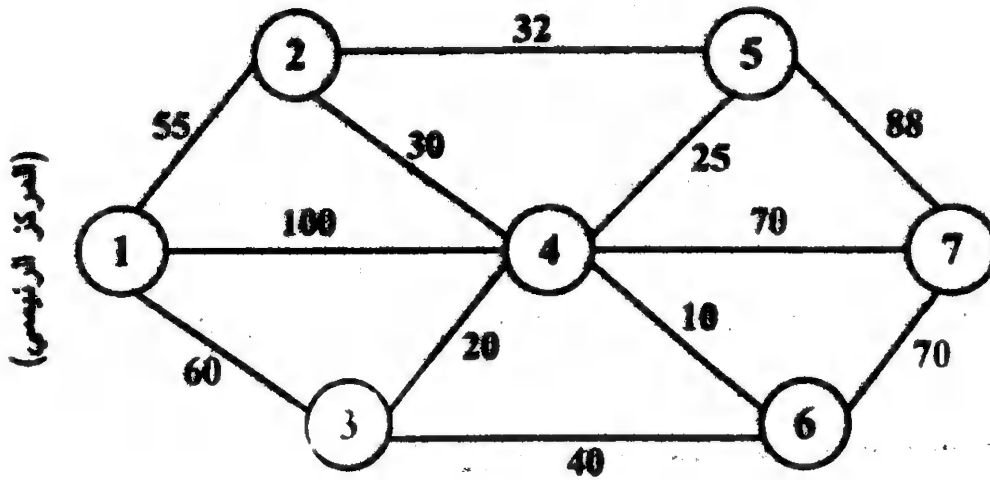
	1	2	3	4	5	6	7
(المركز الرئيسي)	(المركز الرئيسي)						
1	-	55	60	100	-	-	-
2	55	-	-	30	32	-	-
3	60	-	-	20	-	40	-
4	100	30	20	-	25	10	70
5	-	32	-	25	-	-	88
6	-	-	40	10	-	-	70
7	-	-	-	70	88	70	-

المطلوب :

- ١ - رسم شبكة الطرق بين المركز الرئيسي ومواقع العمل المختلفة .
- ٢ - تحديد الطرق أو المسارات التي من شأنها أن تقلل مسافة الانتقال من المركز الرئيسي إلى مواقع العمل المختلفة .

الحل :

- ١ - يتم رسم شبكة الطرق كما يلي :



٢ - يتم تحديد أقصر طريق بالشبكة من المركز الرئيسي وهو الحدث رقم 1 ( أي المصدر ) إلى الموقع الأخير وهو الحدث رقم 7 ( أي المصب ) باستخدام الطريقة المذكورة من خلال الخطوات التالية :

### الخطوة 1 :

تكون جدولاً أساسياً يشتمل على كل أحداث الشبكة ( أي مواقع العمل ) ونضع كل طريق أسفل حدث البداية الخاص به مع ترتيب الطرق ترتيباً تصاعدياً من حيث طول الطريق ، مع مراعاة حذف الطريق (1-2) أسفل الحدث 2 والطريق (3-1) أسفل الحدث 3 والطريق (4-1) أسفل الحدث 4 وذلك لأن الحدث الثاني لهذه الطرق هو الحدث 1 الذي يمثل حدث البداية ( أي المصدر ) بالشبكة ، والسبب نفسه تحذف جميع الطرق أسفل الحدث 7 وهي الطرق : (7-4) ، (7-5) ، (7-6) لأن الحدث الأول لهذه الطرق هو الحدث 7 والذي يمثل حدث النهاية ( أي المصب ) بالشبكة ، ثم نميز حدث البداية رقم 1 بنجمة ونرفق به القيمة صفر . ويتضح ذلك بالجدول التالي :

جدول (٥ - ١)

1*(0)	2	3	4	5	6	7
(1-2)=55	(2-4)=30	(3-4)=20	(4-6)=10	(5-7)=88	(6-7)=70	-
(1-3)=60	(2-5)=32	(3-6)=40	(4-5)=25	-	-	-
(1-4)=100	-	-	(4-7)=70	-	-	-

### الخطوة 2 :

من الجدول (٥ - ١) يلاحظ أن أقصر طريق أسفل الحدث 1 هو الطريق (1-2) ، لذلك يحاط الطريق (1-2) بدائرة ثم نميز الحدث 2 بنجمة

ونرفق به طول هذا الطريق وهو القيمة 55 ثم نحذف من الجدول (٥ - ١) كل الطرق الأخرى التي يكون حدث النهاية لها هو الحدث 2 ، وفي هذه الخطوة لا يوجد بالجدول طرق حدث النهاية لها هو الحدث 2 يمكن حذفها ، كما يتضح بالجدول التالي :

جدول (٥ - ب)

1*(0)	2*(55)	3	4	5	6	7
(1-2)=55	(2-4)=30	(3-4)=20	(4-6)=10	(5-7)=88	(6-7)=70	-
(1-3)=60	(2-5)=32	(3-6)=40	(4-5)=25	-	-	-
(1-4)=100	-	-	(4-7)=70	-	-	-

### الخطوة 3 :

حيث أن آخر حدث مميز بنجمة ليس هو الحدث 7 والذي يمثل حدث النهاية بالشبكة ، لذلك يتم الانتقال إلى الخطوة 4 .

### الخطوة 4 :

تتضمن هذه الخطوة عادة عدد من الجولات على النحو التالي :

### الجولة الأولى :

في الجدول (٥ - ب) الأحداث المميزة بنجوم هما الحدثان 1 ، 2 ، لذلك يتم جمع القيمة المرفقة بكل حدث من هذين الحدثين مع قيمة أقصر طريق غير محاط بدائرة أسفل الحدث كما يلي :

الحدث 1 : القيمة المرفقة بالحدث 1 + طول الطريق (1-3)

$$60 = 60 + 0 =$$

الحدث 2 : القيمة المرفقة بالحدث 2 + طول الطريق (2-4)

$$85 = 30 + 55 =$$

وحيث أن 60 هو المجموع الأصغر ، لذلك يميز الحدث 3 بنجمة وترفق به القيمة 60 ثم يحاط الطريق (1-3) بدائرة ، ويحذف من الجدول (٥ - ب) كل الطرق الأخرى التي يكون حدث النهاية لها هو الحدث 3 ، وفي هذه الخطوة لا توجد أيضاً طرق حدث النهاية لها هو الحدث 3 يمكن حذفها ، ويتضح ذلك في الجدول التالي :

جدول (٥ - ج)

1*(0)	2*(55)	3*(60)	4	5	6	7
(1-2)=55	(2-4)=30	(3-4)=20	(4-6)=10	(5-7)=88	(6-7)=70	-
(1-3)=60	(2-5)=32	(3-6)=40	(4-5)=25	-	-	-
(1-4)=100	-	-	(4-7)=70	-	-	-

ال الجولة الثانية :

من الجدول (٥ - ج) يلاحظ أن الأحداث التي تم تمييزها بنجوم هي الأحداث 1 ، 2 ، 3 ، حيث تجمع القيمة المرفقة بكل حدث من هذه الأحداث مع قيمة أقصر طريق غير محاط بدائرة أسفل هذا الحدث كما يلي :

الحدث 1 : القيمة المرفقة بالحدث 1 + طول الطريق (1-4)

$$100 = 100 + 0 =$$

الحدث 2 : القيمة المرفقة بالحدث 2 + طول الطريق (2-4)

$$85 = 30 + 55 =$$

الحدث 3 : القيمة المرفقة بالحدث 3 + طول الطريق (3-4)

$$80 = 20 + 60 =$$

وحيث أن 80 هو المجموع الأصغر ، لذلك نميز الحدث 4 بنجمة وترفق به القيمة 80 ثم يحاط الطريق (3-4) بدائرة ، ويحذف من الجدول (٥ - ج) كل الطرق الأخرى التي يكون حدث النهاية لها هو الحدث 4 ، أي يتم حذف الطريق (1-4) الموجود أسفل للحدث 1 والطريق (2-4) الموجود أسفل الحدث 2 ونحصل على الجدول التالي :

جدول (٥ - د)

1*(0)	2*(55)	3*(60)	4*(80)	5	6	7
(1-2)=55	(2-5)=32	(3-4)=20	(4-6)=10	(5-7)=88	(6-7)=70	-
(1-3)=60	-	(3-6)=40	(4-5)=25	-	-	-
-	-	-	(4-7)=70	-	-	-

### ال الجولة الثالثة :

من الجدول (٥ - د) الأحداث المميزة بنجوم ويوجد أسفلها طرق غير محاطة بدوائر هي الأحداث 2 ، 3 ، 4 ، وبخصوص هذه الأحداث يكرر ما حدث في الجولتين الأولى والثانية كما يلي :



الحدث 2 : القيمة المرفقة بالحدث 2 + طول الطريق (2-5)

$$87 = 32 + 55 =$$

الحدث 3 : القيمة المرفقة بالحدث 3 + طول الطريق (3-6)

$$100 = 40 + 60 =$$

الحدث 4 : القيمة المرفقة بالحدث 4 + طول الطريق (4-6)

$$90 = 10 + 80 =$$

وحيث أن القيمة 87 هي المجموع الأصغر لذلك يميز الحدث 5 بنجمة ثم يحاط الطريق (2-5) بدائرة ويحذف من الجدول (5 - د) كل الطرق الأخرى التي يكون حدث النهاية لها هو الحدث 5 ، أي يتم حذف الطريق (4-5) الموجود أسفل الحدث 4 ونحصل على الجدول التالي :

جدول (5 - هـ)

1*(0)	2*(55)	3*(60)	4*(80)	5*(87)	6	7
(1-2)=55	(2-5)=32	(3-4)=20	(4-6)=10	(5-7)=88	(6-7)=70	-
(1-3)=60	-	(3-6)=40	(4-7)=70	-	-	-

#### الجولة الرابعة :

من الجدول (5 - هـ) يلاحظ أن الأحداث المميزة بنجوم ويوجد أسفلها طرق غير محاطة بدوائر هي الأحداث 3 ، 4 ، 5 ، نكرر بالنسبة لهذه الأحداث ما حدث بالجولات السابقة ، حيث نجد أن :

الحدث 3 : القيمة المرفقة بالحدث 3 + طول الطريق (3-6)

$$100 = 40 + 60 =$$

الحدث 4 : القيمة المرفقة بالحدث 4 + طول الطريق (4-6)

$$90 = 10 + 80 =$$

الحدث 5 : القيمة المرفقة بالحدث 5 + طول الطريق (5-7)

$$175 = 88 + 87 =$$

وحيث أن القيمة 90 هي المجموع الأصغر ، لذلك يتم تمييز الحدث 6 بنجمة وترفق به القيمة 90 ويحاط الطريق (4-6) بدائرة ثم يحذف من الجدول (٥ - هـ) كل الطرق الأخرى التي يكون حدث النهاية لها هو الحدث 6 ، حيث يتم حذف الطريق (3-6) أسفل الحدث 3 ، وننتقل إلى الجدول (٥ - و) :

جدول (٥ - و)

1*(0)	2*(55)	3*(60)	4*(80)	5*(87)	6*(90)	7
(1-2)=55	(2-5)=32	(3-4)=20	(4-6)=10	(5-7)=88	(6-7)=70	-
(1-3)=60	-	-	(4-7)=70	-	-	-

#### الجولة الخامسة :

في الجدول (٥ - و) يلاحظ أن الأحداث المميزة بنجوم ويوجد أسفلها طرق غير محاطة بدوائر هي الأحداث 4 ، 5 ، 6 ، وبخصوص هذه الأحداث يتم حساب ما يلي :

الحدث 4 : القيمة المرفقة بالحدث 4 + طول الطريق (4-7)

$$150 = 70 + 80 =$$

الحدث 5 : القيمة المرفقة بالحدث 5 + طول الطريق (5-7)

$$175 = 88 + 87 =$$

الحدث 6 : القيمة المرفقة بالحدث 6 + طول الطريق (6-7)

$$160 = 70 + 90 =$$

وحيث أن القيمة 150 هي المجموع الأصغر ، لذا يتم تمييز الحدث 7 بنجمة وترفق به القيمة 150 ، ويحاط الطريق (4-7) بدائرة ، ثم تحذف كل الطرق الأخرى التي يكون حدث النهاية لها هو الحدث 7 ، فيحذف الطريق (5-7) أسفل الحدث 5 والطريق (6-7) أسفل الحدث 6 ، كما يتضح من الجدول (٥-ز) :

جدول (٥-ز)

1*(0)	2*(55)	3*(60)	4*(80)	5*(87)	6*(90)	7*(150)
(1-2)=55	(2-5)=32	(3-4)=20	(4-6)=10	-	-	-
(1-3)=60	-	-	(4-7)=70	-	-	-

حيث أن جميع أحداث الشبكة قد تم تمييزها بنجوم ننتقل إلى الخطوة 5

## الخطوة 5 :

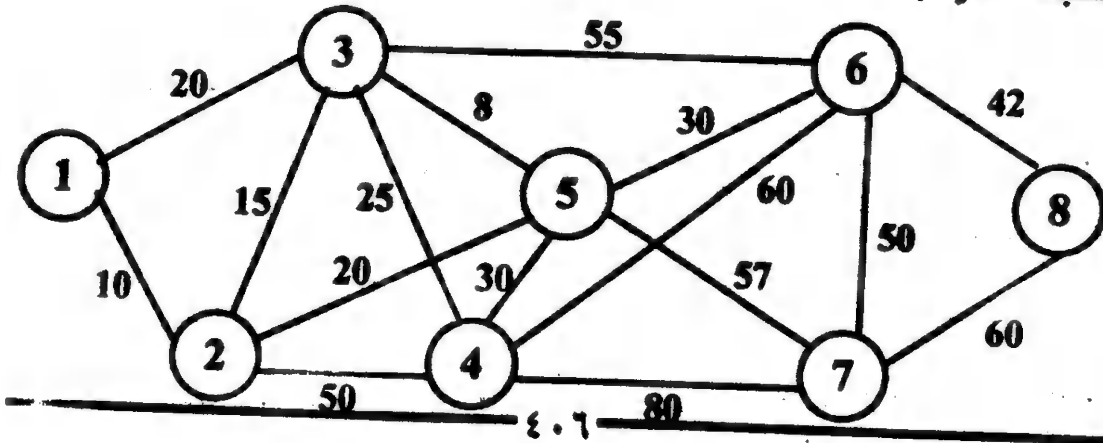
طول أقصر طريق من حدث البداية رقم 1 حتى حدث النهاية رقم 7 يساوي 150 كيلو متر ، وهو عبارة عن القيمة المرفقة بحدث النهاية رقم 7 .  
ولتحديد المسار الأمثل - وهو هنا الطريق الأقصر - فمن الشكل ( ٥ - ز ) يحدد الطريق المحاط بدائرة وله الحدث 7 كحدث نهاية وهو الطريق ( 4-7 ) ، ثم يحدد بعد ذلك الطريق المحاط بدائرة ويكون حدث النهاية له هو الحدث 4 وهو الطريق ( 3-4 ) ، وبلي ذلك الطريق المحاط بدائرة ويكون حدث النهاية له هو الحدث 3 فيكون هو الطريق ( 1-3 ) ، وحيث أن الحدث 1 هو حدث البداية ( أي المصدر ) بالشبكة فيكون الطريق الأقصر من الحدث 1 إلى الحدث 7 هو :

( 1-3 ) ، ( 3-4 ) ، ( 4-7 )

وطوله يساوي 150 كيلو متر .

## مثال (٦) :

مصنع لإنتاج السكر بمدينة نجع حمادي يقوم بنقل إنتاجه إلى سبع مدن أخرى فإذا كانت تكلفة نقل الطن ( بالجنيه ) بين كل اثنتين من المدن موضحاً بالشبكة التالية :



## المطلوب :

- ١ - تحديد أقل الطرق تكلفة للنقل من المصنع بمدينة نجع حمادي إلى المدينة 8
- ٢ - تحديد أقل الطرق تكلفة للنقل من المصنع بمدينة نجع حمادي إلى المدينة 6
- ٣ - تحديد أقل الطرق تكلفة للنقل من المدينة 3 إلى المدينة 6

## الحل :

تستخدم طريقة التمييز لتحديد أقل الطرق تكلفة من خلال الخطوات

## التالية :

## الخطوة 1 :

نكون جدولاً أساسياً يشتمل على ثمانية أحداث تمثل المدن المختلفة ونضع كل طريق أسفل حدث البداية الخاص به مع ترتيب الطرق ترتيباً تصاعدياً من حيث تكلفة الانتقال باستخدام تلك الطرق ، مع حذف الطرق (1-2) ، (3-1) أسفل الحدث 1 لأن حدث النهاية لها هو الحدث 1 والذي يمثل حدث البداية بالشبكة . بالمثل ، يتم حذف الطرق (8-6) ، (8-7) أسفل الحدث 8 ، لأن حدث البداية لها هو الحدث 8 والذي يمثل حدث النهاية بالشبكة ، ثم يميز حدث البداية رقم 1 بنجمة وترفق به القيمة 0 ، وبأخذ الجدول الشكل التالي :

جدول (٦ - ١)

1*(0)	2	3	4	5	6	7	8
(1-2)=10	(2-3)=15	(3-5)=8	(4-5)=30	(5-6)=30	(6-8)=42	(7-8)=60	-
(1-3)=20	(2-5)=25	(3-4)=25	(4-6)=60	(5-7)=57	(6-7)=50	-	-
	(2-4)=50	(3-6)=55	(4-7)=80	-	-	-	-

## الخطوة 2 :

أرخص الطرق أسفل الحدث 1 المميز بنجمة هو الطريق (1-2) فيحاط بدائرة ثم يميز الحدث 2 بنجمة وترفق به القيمة 10 ، ويحذف من الجدول كل الطرق الأخرى التي يمثل الحدث 2 حدث نهاية بالنسبة لها ، في هذه الجولة لا توجد طرق يمكن حذفها ، كما يتضح من جدول (٦ - ب) .

جدول (٦ - ب)

1*(0)	2*(10)	3	4	5	6	7	8
(1-2)=10	(2-3)=15	(3-5)=8	(4-5)=30	(5-6)=30	(6-8)=42	(7-8)=60	-
(1-3)=20	(2-5)=25	(3-4)=25	(4-6)=60	(5-7)=57	(6-7)=50	-	-
	(2-4)=50	(3-6)=55	(4-7)=80	-		-	-

## الخطوة 3 :

حيث أن آخر حدث مميز بنجمة ليس هو الحدث رقم 8 والذي يمثل حدث النهاية بالشبكة ننقل إلى الخطوة 4 .

## الخطوة 4 :

تتضمن هذه الخطوة عدد من الجولات على النحو التالي :

## الجولة الأولى :

الأحداث المميزة بنجوم ويوجد أسفلها طرق غير محاطة بدوائر في الجدول (٦ - ب) هما الحدثان 1 ، 2 . وبخصوص كل حدث منهما تحسب القيم التالية :

الحدث 1 : القيمة المرفقة بالحدث 1 + تكلفة الطريق (1-3)

$$20 = 20 + 0 =$$

الحدث 2 : القيمة المرفقة بالحدث 2 + تكلفة الطريق (2-3)

$$25 = 15 + 10 =$$

حيث أن القيمة 20 تمثل المجموع الأصغر ، لذلك يحاط النشاط (1-3) بدائرة ويميز الحدث 3 بنجمة وترفق به القيمة 20 ، ثم تحذف كل الطرق الأخرى التي تكون نهايتها ممثلة بالحدث 3 ، حيث يتم حذف الطريق (2-3) أسفل الحدث 2 ، كما هو مبين في الجدول (٦ - ج) :

جدول (٦ - ج)

1*(0)	2*(10)	3*(20)	4	5	6	7	8
(1-2)=10	(2-5)=25	(3-5)=8	(4-5)=30	(5-6)=30	(6-8)=42	(7-8)=60	-
(1-3)=20	(2-4)=50	(3-4)=25	(4-6)=60	(5-7)=57	(6-7)=50	-	-
-	-	(3-6)=55	(4-7)=80	-	-	-	-

### الجولة الثانية :

الأحداث المميزة بنجوم ويوجد أسفلها طرق غير محاطة بدوائر هما الحدثان 2 ، 3 ، وبخصوص هذين الحدثين يلاحظ ما يلي :

الحدث 2 : القيمة المرفقة بالحدث 2 + تكلفة الطريق (2-5)

$$35 = 25 + 10 =$$

الحدث 3 : القيمة المرفقة بالحدث 3 + تكلفة الطريق (3-5)

$$28 = 8 + 20 =$$

وحيث أن القيمة 28 تمثل المجموع الأصغر ، لذلك يحاط الطريق (3-5) بدائرة ويميز الحدث 5 بنجمة وترفق به القيمة 28 ، ثم تحذف كل الطرق الأخرى التي يكون حدث النهاية لها هو الحدث 5 ، حيث يحذف الطريق (2-5) أسفل الحدث 2 والطريق (4-5) أسفل الحدث 4 كما يتضح من الجدول (٦ - د) :

جدول (٦ - د)

1*(0)	2*(10)	3*(20)	4	5*(28)	6	7	8
(1-2)=10	(2-4)=50	(3-5)=8	(4-6)=60	(5-6)=30	(6-8)=42	(7-8)=60	-
(1-3)=20	-	(3-4)=25	(4-7)=80	(5-7)=57	(6-7)=50	-	-
-	-	(3-6)=55	-	-	-	-	-

### ال الجولة الثالثة :

الأحداث المميزة بنجوم ويوجد أسفلها طرق غير محاطة بدوائر هي الأحداث 2 ، 3 ، 4 ، وبخصوص كل حدث من هذه الأحداث تحسب القيم التالية :

الحدث 2 : القيمة المرفقة بالحدث 2 + تكلفة الطريق (2-4)

$$60 = 50 + 10 =$$



الحدث 3 : القيمة المرفقة بالحدث 3 + تكلفة الطريق (3-4)

$$45 = 25 + 20 =$$

الحدث 5 : القيمة المرفقة بالحدث 5 + تكلفة الطريق (5-6)

$$58 = 30 + 28 =$$

وكما هو واضح فإن القيمة 45 تمثل المجموع الأصغر ، لذلك يحاط الطريق (3-4) بدائرة ويميز الحدث 4 بنجمة وترفق به القيمة 45 ، ثم تحذف كل الطرق الأخرى التي تنتهي بالحدث 4 ، حيث يحذف الطريق (2-4) أسفل الحدث 2 ، كما يتضح من الجدول (٦ - هـ) :

جدول (٦ - هـ)

1*(0)	2*(10)	3*(20)	4*(45)	5*(28)	6	7	8
(1-2)=10	-	(3-5)=8	(4-6)=60	(5-6)=30	(6-8)=42	(7-8)=60	-
(1-3)=20	-	(3-4)=25	(4-7)=80	(5-7)=57	(6-7)=50	-	-
-	-	(3-6)=55	-	-	-	-	-

#### الجدولة الرابعة :

الأحداث المميزة بنجوم ويوجد أسفلها طرق غير محاطة بدوائر هي الأحداث 3 ، 4 ، 5 ، وبخصوص كل حدث من هذه الأحداث تحسب القيم التالية :

الحدث 3 : القيمة المرفقة بالحدث 3 + تكلفة الطريق (3-6)

$$75 = 55 + 20 =$$

الحدث 4 : القيمة المرفقة بالحدث 4 + تكلفة الطريق (4-5)

$$105 = 60 + 45 =$$

الحدث 5 : القيمة المرفقة بالحدث 5 + تكلفة الطريق (5-6)

$$58 = 30 + 28 =$$

حيث أن القيمة 58 تمثل المجموع الأصغر ، لذلك يميز الحدث 6 بنجمة وترفق به القيمة 58 ويحاط الطريق (5-6) بدائرة ، ثم تحذف كل الطرق الأخرى التي يكون حدث النهاية لها هو الحدث 6 ، حيث يتم حذف الطريق (3-6) أسفل الحدث 3 والطريق (4-6) أسفل الحدث 4 كما هو مبين في الجدول (٦ - و) .

جدول (٦ - و)

1*(0)	2*(10)	3*(20)	4*(45)	5*(28)	6*(58)	7	8
(1-2)=10	.	(3-5)=8	(4-7)=80	(5-6)=30	(6-8)=42	(7-8)=60	.
(1-3)=20	.	(3-4)=25	.	(5-7)=80	(6-7)=50	.	.

#### الجدولة الخامسة :

الأحداث المميزة بنجوم ويوجد أسفلها طرق غير محاطة بدوائر في الجدول (٦ - و) هي الأحداث 4 , 5 , 6 ، وبخصوص تلك الأحداث تحسب القيم التالية :

الحدث 4 : القيمة المرفقة بالحدث 4 + تكلفة الطريق (4-7)

$$125 = 80 + 45 =$$

الحدث 5 : القيمة المرفقة بالحدث 5 + تكلفة الطريق (5-7)

$$108 = 80 + 28 =$$

الحدث 6 : القيمة المرفقة بالحدث 6 + تكلفة الطريق (6-8)

$$100 = 42 + 58 =$$

وحيث أن القيمة 100 هي المجموع الأصغر ، لذا يميز الحدث 8 بنجمة وترفق به القيمة 100 ويحاط الطريق (6-8) بدائرة ، ثم تحذف جميع الطرق الأخرى التي يكون حدث النهاية لها هو الحدث 8 ، حيث يتم حذف الطريق (7-8) أسفل الحدث 7 كما يتضح من الجدول (٦- ز) .

جدول (٦- ز)

1*(0)	2*(10)	3*(20)	4*(45)	5*(28)	6*(58)	7	8*(100)
(1-2)=10	-	(3-5)=8	(4-7)=80	(5-6)=30	(6-8)=42	-	-
(1-3)=20	-	(3-4)=25	-	(5-7)=80	(6-7)=50	-	-

الجولة السادسة :

من الجدول (٦- ز) يلاحظ أن الأحداث المميزة بنجوم ويوجد أسفلها طرق غير محاطة بدوائر هي : 4 , 5 , 6 ، وبخصوص تلك الأحداث تحسب القيم التالية :

الحدث 4 : القيمة المرفقة بالحدث 4 + تكلفة الطريق (4-7)

$$125 = 80 + 45 =$$

الحدث 5 : القيمة المرفقة بالحدث 5 + تكلفة الطريق (5-7)

$$85 = 57 + 28 =$$

الحدث 6 : القيمة المرفقة بالحدث 6 + تكلفة الطريق (6-7)

$$108 = 50 + 58 =$$

وحيث أن 85 هو المجموع الأصغر ، لذلك يميز الحدث 7 بنجمة وترفق به القيمة 85 ويحاط الطريق (5-7) بدائرة ، ثم تحذف جميع الطرق الأخرى التي يمثل حدث النهاية لها الحدث 7 ، حيث يتم حذف الطريق (4-7) أسفل الحدث 4 ، والطريق (6-7) أسفل الحدث 6 ، ويتضح ذلك في الجدول التالي :

جدول (٦ - ح)

1*(0)	2*(10)	3*(20)	4*(45)	5*(28)	6*(58)	7*(85)	8*(100)
(1-2)=10	.	(3-5)=8	.	(5-6)=30	(6-8)=42	.	.
(1-3)=20	.	(3-4)=25	.	(5-7)=57	.	.	.

#### الخطوة 5 :

حيث أن جميع الأحداث بالشبكة أصبحت مميزة بنجوم نكون قد وصلنا إلى الحل الأمثل ، ومن جدول الحل الأمثل الأخير - جدول (٦ - ح) يتم الإجابة على التساؤلات المطروحة كما يلي :

١ - أقل الطرق تكلفة للنقل من المصنع بمدينة نجع حمادي إلى المدينة 8 هو الطريق (6-8) ثم (5-6) ثم (3-5) ثم (1-3) ، أي هو الطريق : (1-3) ، (3-5) ، (5-6) ، (6-8) ، وأقل تكلفة نقل ممكنة خلال هذا الطريق تساوي 100 جنيه للطن الواحد .

٢ - أقل الطرق تكلفة للنقل من المصنع بمدينة نجع حمادي إلى المدينة 6 هو الطريق (5-6) ثم (3-5) ثم (1-3) ، أي هو الطريق (1-3) ، (3-5) ، (5-6) وأقل تكلفة نقل ممكنة خلال هذا الطريق للطن الواحد تساوي 58 جنيهاً .

٣ - أقل الطرق تكلفة للنقل من المدينة 3 إلى المدينة 6 هو الطريق (5-6) ثم (3-5) ، أي هو الطريق (3-5) ، (5-6) وأقل تكلفة نقل للطن خلال هذا الطريق بين المدينتين 3 ، 6 تحسب كما يلي :

أقل تكلفة نقل من المدينة 3 إلى المدينة 6

= القيمة المرفقة بالحدث 6 - القيمة المرفقة بالحدث 3

= 58 - 20 = 38 جنيه للطن الواحد .

#### (٤-٥) مشكلة أقصى تدفق The Maximal - Flow Problem

بفرض أنه توجد شبكة تدفق لها حدث بداية واحد يسمى بالمصدر Source Node ولها أيضاً حدث نهاية واحد يمثل نقطة الوصول أو المصب Sink Node ، فإن مشكلة أقصى تدفق تهتم بتحديد أقصى كمية تدفق ( من السوائل أو الرسائل أو المركبات أو المسافرين ... الخ ) والتي يمكن أن ترسل

من حدث البداية حتى حدث النهاية بشبكة التدفق خلال مدة زمنية معينة وذلك في حدود طاقات النقل المتاحة لكل نشاط ( وبالتالي لكل مسار ) بالشبكة .

وسوف يفترض أن لكل نشاط بالشبكة طاقة استيعابية أو سعة معينة Arc Capacity ، وهي تمثل أقصى كمية تدفق يمكن أن تمر خلال هذا النشاط في وحدة الزمن ، فعلى سبيل المثال ، فإن كمية مياه الشرب التي يمكن أن تمر خلال ماسورة معينة في وحدة زمنية معينة سوف تكون محكومة بحجم الماسورة ولا يمكن أن تتعدى هذا الحجم ، كما أن عدد المركبات التي يمكن أن تمر خلال أحد الطرق في وحدة زمنية معينة لا يمكن أن تتعدى الطاقة الاستيعابية لهذا الطريق وهكذا .

وسوف يفترض أيضاً أنه لا توجد طاقات ( أو ساعات ) محددة بالنسبة لأحداث الشبكة ، وأن كمية التدفق التي تخرج من أي حدث بالشبكة ( بخلاف حدثي البداية والنهاية ) سوف تساوي كمية التدفق التي تدخل إليه ، بمعنى أنه لا يسمح بتخزين أي قدر من المواد المطلوب نقلها أو شحنها بأي حدث من هذه الأحداث .

وسوف يرتبط بكل نشاط  $(i - j)$  بالشبكة طاقتين ( أو ساعتين ) إحداهما توضع في بداية النشاط ويرمز لها بالرمز  $c_1$  ، والأخرى توضع في نهاية النشاط ويرمز لها بالرمز  $c_2$  ، كما يتضح من الشكل التالي :



شكل ( ٥ - ١٣ )

حيث تشير السعة  $c_1$  إلى أقصى كمية تدفق يمكن أن تمر خلال النشاط  $(i - j)$  من الحدث  $i$  إلى الحدث  $j$  ، بينما تشير السعة  $c_2$  إلى أقصى كمية تدفق يمكن أن تمر خلال النشاط  $(i - j)$  في الاتجاه المضاد ، أي من الحدث  $j$  إلى الحدث  $i$  .

فعلى سبيل المثال ، إذا كان أحد الشوارع  $(i - j)$  في مدينة الزقازيق والمسموح بالمرور فيه في اتجاهين تم تمثيله بيانياً ضمن شبكة النقل بالمدينة حسب طاقات الشوارع ( بالآلاف مركبة في الساعة ) كما يلي :



فيعني ذلك أن أقصى عدد من المركبات يمكن أن يمر بالشارع من الحدث  $i$  إلى الحدث  $j$  هو 5000 مركبة في الساعة ، بينما أقصى عدد من المركبات يمكن أن يمر بنفس الشارع من الحدث  $j$  إلى الحدث  $i$  هو 3000 مركبة في الساعة ( قد يكون ذلك راجعاً إلى اختلاف عدد حارات المرور في كل من الاتجاهين بالشارع ) .

لما إذا تم تمثيل الشارع  $(p - q)$  في شبكة النقل كما يلي :



فيعني ذلك أن أقصى عدد من المركبات يمكن أن يمر من النقطة  $p$  إلى النقطة  $q$  هو 4000 مركبة في الساعة ، وغير مسموح بمرور أي مركبة من النقطة  $q$  إلى النقطة  $p$  ( وهذا يعني أن المرور بهذا الشارع في اتجاه واحد فقط من  $p$  إلى  $q$  ) .

وبالرغم من أن مشكلة أقصى تدفق يمكن صياغتها كنموذج برمجة خطية وبالتالي يتم حلها باستخدام طريقة السمبلكس ، إلا أن هناك طرق خاصة بأساليب التحليل الشبكي أكثر سهولة من طريقة السمبلكس تمكن من التوصل إلى أقصى كمية تدفق بالشبكة بشكل مباشر .

### طريقة تحديد أقصى كمية تدفق A Maximal - Flow Method

لعل أول من قدم طريقة لتحديد أقصى كمية تدفق خلال الشبكة هما العالمان فورد وفولكرسون عام ١٩٦٢ في مؤلفهما الشهير " التدفق في الشبكات " (\*) ، وتتضمن هذه الطريقة عدد من الجولات ، كل جولة من هذه الجولات تتكون من مجموعة الخطوات التالية :

#### الخطوة 1 :

يتم بشكل عشوائي اختيار أي مسار بالشبكة من حدث البداية ( المصدر ) إلى حدث النهاية ( المصب ) بحيث يستوعب هذا المسار كمية تدفق موجبة لكل الأنشطة المكونة لهذا المسار ، فإذا لم يعد يوجد مثل هذا المسار نكون قد وصلنا إلى الحل الأمثل .

#### الخطوة 2 :

تحدد أقصى كمية تدفق يمكن أن تنقل خلال هذا المسار على أنها تساوي أقل طاقة استيعابية ( أو سعة ) للأنشطة المكونة لهذا المسار ولنرمز لها بالرمز  $f_i$  .

(\*) Ford, L., and Fulkerson, D., *Flows in Networks*, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1962.



## الخطوة 3 :

تزيد كمية التدفق خلال الشبكة بإرسال الكمية  $f_i$  في المسار الذي تم اختياره في الخطوة 1 ، ويتم ذلك من خلال تخفيض طاقة التدفق ( باتجاه أمامي من المصدر إلى المصب ) لكل نشاط من أنشطة هذا المسار بمقدار  $f_i$  وزيادة طاقة التدفق العكسية ( باتجاه عكسي من المصب إلى المصدر ) بنفس القدر  $f_i$  ، ويعني ذلك أن طاقة التدفق لأحد أنشطة هذا المسار ( وهو النشاط الذي له أقل طاقة تدفق ،  $f_i$  ) سوف تساوي الصفر ، وهذا يعني إلغاء هذا النشاط أو الخط من الشبكة واعتباره كأن لم يكن . ثم نضيف  $f_i$  وحدة إلى كمية التدفق المسلمة إلى المصب ( أو حدث النهاية بالشبكة ) .

## الخطوة 4 :

نعيد رسم شبكة التدفق مع مراعاة التعديلات التي تمت في الخطوة 3 .

## الخطوة 5 :

تكرر الخطوات من الخطوة 1 حتى الخطوة 4 في كل جولة من جولات الحل ، ويعتبر الحل منتهياً إذا لم يعد بالشبكة أي مسار من حدث البداية ( المصدر ) إلى حدث النهاية ( المصب ) يستوعب تدفق موجب في الاتجاه الأمامي ( أي من المصدر إلى المصب ) .

## الخطوة 6 :

أقصى كمية تدفق يمكن أن تشحن من حدث البداية ( المصدر ) إلى حدث النهاية ( المصب ) تكون عبارة عن إجمالي كميات التدفق المسلمة إلى المصب ، حيث :

أقصى كمية تدفق يمكن أن تشحن من المصدر إلى المصب هي :

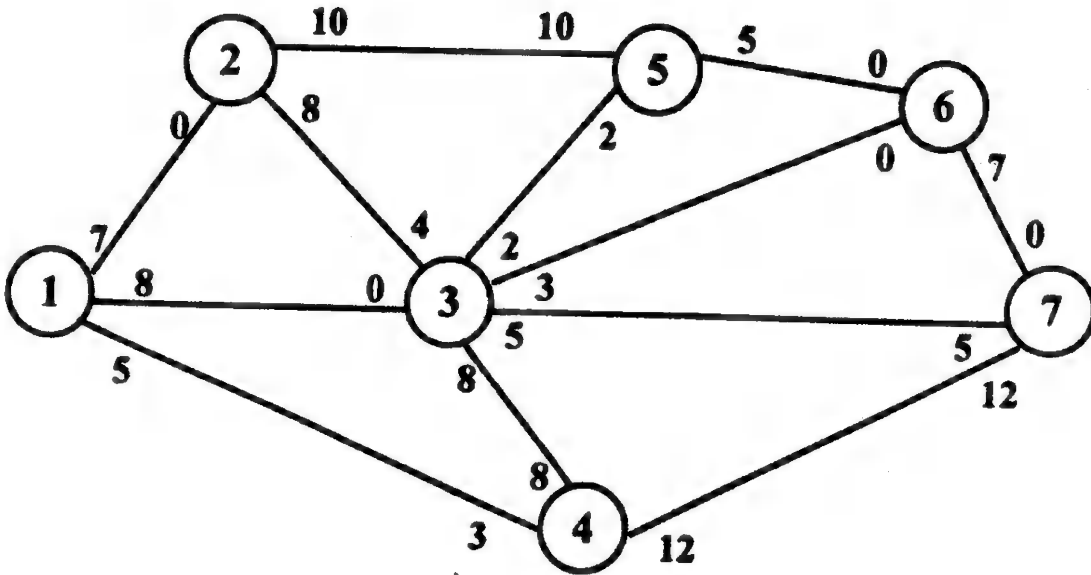
$$\sum_{i=1}^d f_i$$

حيث  $d$  تشير إلى عدد جولات الحل .

وبالرغم من أن عدد جولات الحل في هذه الطريقة سوف تختلف باختلاف ترتيب المسارات التي يتم اختيارها في الخطوة 1 من كل جولة ، إلا أنها سوف تعطي في النهاية نفس قيمة الحل الأمثل .

مثال (٧) :

إذا كانت شبكة الطرق داخل مدينة الزقازيق موضحاً بها طاقات التدفق لكل طريق من أعداد المركبات ( بالآلف ) في الساعة في كلا الاتجاهين بجوار بداية ونهاية كل نشاط كما هو موضح بالشبكة (٧ - أ)



الشبكة (٧ - أ)

فعلى سبيل المثال ، بالنسبة للطريق (1-2) فإن أقصى عدد من المركبات يمكن أن يمر من الحدث 1 إلى الحدث 2 هو 7 آلاف مركبة في الساعة ، ولكن غير مسموح بمرور أي مركبة من الحدث 2 إلى الحدث 1 ، أما الطريق (1-4) مثلاً ، فإن أقصى عدد من المركبات يمكن أن يمر من الحدث 1 إلى الحدث 4 هو 5 آلاف مركبة في الساعة ، بينما أقصى عدد من المركبات يمكن أن يمر من الحدث 4 إلى الحدث 1 هو 3 آلاف مركبة في الساعة ، وهكذا .

#### المطلوب :

تحديد أقصى كمية تدفق من المركبات في الساعة يمكن أن تمر من حدث البداية رقم 1 ( أي المصدر ) إلى حدث النهاية رقم 7 ( أي المصب ) .

#### الحل :

يتم تطبيق طريقة فورد وفولكرسون للحصول على أقصى كمية تدفق من المركبات من الحدث 1 إلى الحدث 7 من خلال الجولات التالية :

#### الجولة الأولى :

تتضمن مجموعة الخطوات التالية :

#### الخطوة 1 :

يتم اختيار أي مسار من مسارات الشبكة بشكل عشوائي من الحدث 1 حتى الحدث 7 وليكن المسار [ (1-2) , (2-3) , (3-7) ] .

## الخطوة 2 :

أقصى كمية تدفق يمكن أن تتقل خلال هذا المسار تحسب كما يلي :

أقصى كمية تدفق

= الأقل من { طاقة الطريق (1-2) , طاقة الطريق (2-3) , طاقة الطريق (3-7) } في الاتجاه الأمامي

$$5 = \{ 5, 8, 7 \}$$

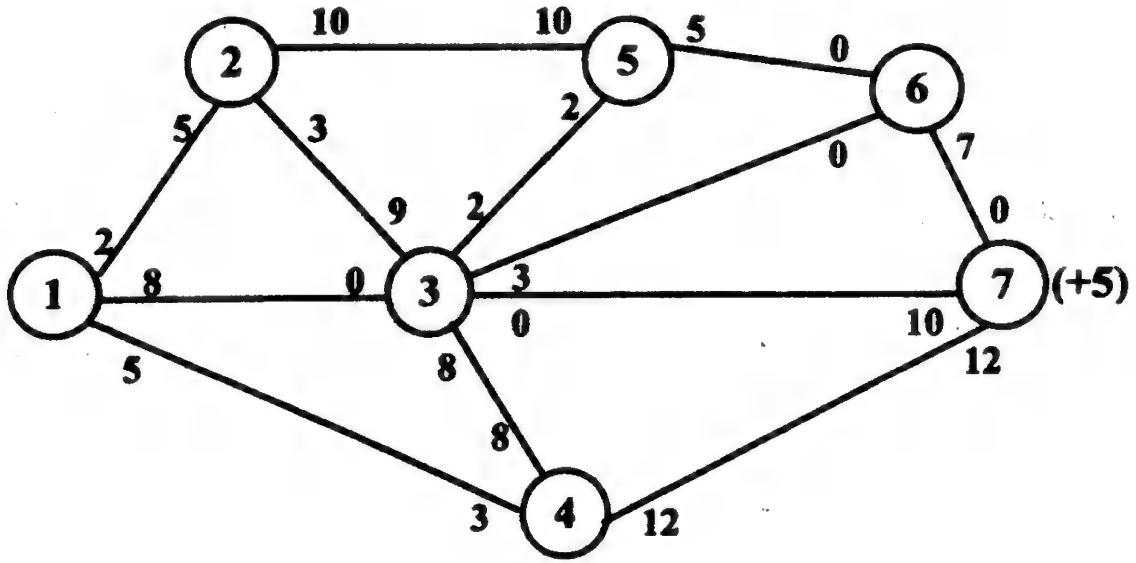
## الخطوة 3 :

يتم شحن هذا العدد من المركبات إلى حدث النهاية 7 ، أي تسلم 5 وحدات إلى الحدث 7 ، وتخفض طاقات الطرق (1-2) ، (2-3) ، (3-7) ب 5 وحدات ، وتزداد طاقات الطرق (2-1) ، (3-2) ، (7-3) ب 5 وحدات ، بعد هذه الجولة تصبح الطاقة المتاحة للطريق (3-7) مساوية للصفر وبالتالي يمكن حذفه من الشبكة أو اعتباره كأن لم يكن .

## الخطوة 4 :

نعيد رسم الشبكة بعد عمل التعديلات السابقة كما يتضح من الشبكة

(٧ - ب)



الشبكة (٧ - ب)

الخطوة 5 :

حيث أنه ما زال توجد مسارات أخرى بالشبكة تستوعب تدفق موجب من حدث البداية 1 إلى حدث النهاية 7 ، فننتقل إلى الجولة التالية للحل .

الجولة الثانية :

الخطوة 1 :

يتم اختيار مسار آخر من مسارات الشبكة (٧ - ب) بشكل عشوائي وليكن المسار  $[(1-3), (3-4), (4-7)]$  .

الخطوة 2 :

أقصى تدفق خلال هذا المسار

= الأقل من { طاقة الطريق (1-3) , طاقة الطريق (3-4) , طاقة الطريق (4-7) }

$$\bullet 8 = \{ 12, 8, 8 \} \text{ من الأقل} =$$

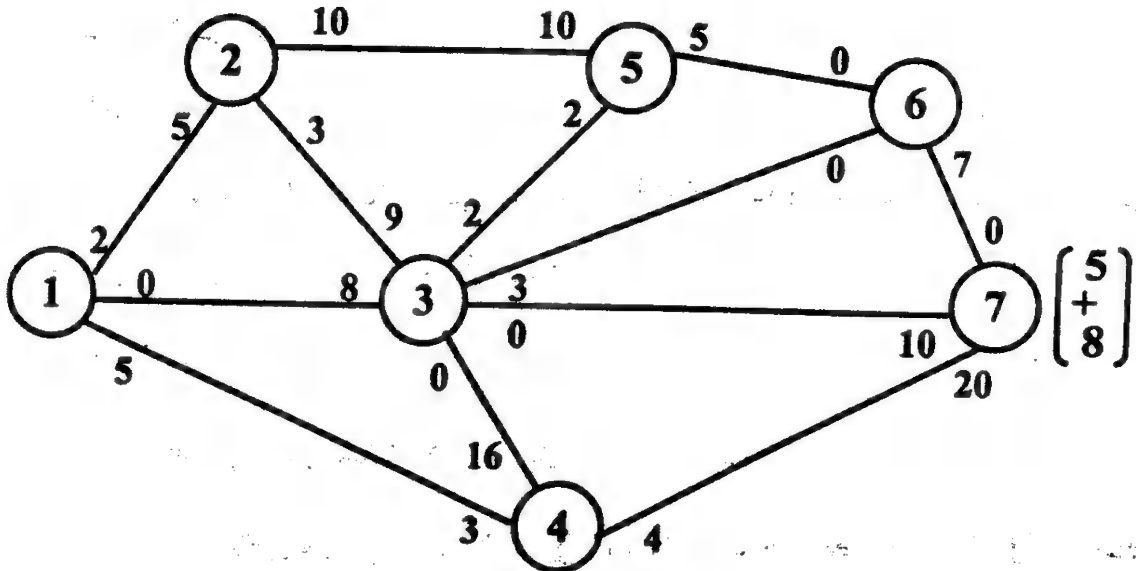
الخطوة 3 :

يتم شحن هذا العدد من المركبات إلى حدث النهاية 7 ، أي نسلم 8 وحدات إلى الحدث 7 ، وتخفض طاقات الطرق (1-3) ، (3-4) ، (4-7) ب 8 وحدات ، وتزداد طاقات الطرق (3-1) ، (4-3) ، (7-4) ب 8 وحدات ، ويلاحظ أن الطاقة المتاحة لكل من الطريقين (1-3) ، (3-4) سوف تصبح مساوية للصفر ، ومن ثم يمكن حذف كل منهما أو اعتبار كل منهما كأن لم يكن .

الخطوة 4 :

نعيد رسم الشبكة بعد عمل هذه التعديلات كما يتضح من الشبكة

(٧ - جـ) .



الشبكة (٧ - جـ)

## الخطوة 5 :

حيث أنه ما زال توجد مسارات أخرى بالشبكة تستوعب تدفق موجب من الحدث 1 حتى الحدث 7 ، لذا يتم الانتقال إلى الجولة التالية .

## الجولة الثالثة :

## الخطوة 1 :

يختار بشكل عشوائي مسار آخر من مسارات الشبكة الموضحة بالشبكة (٧ - ج) يستوعب تدفق موجب وليكن المسار [ (1-4) , (4-7) ] .

## الخطوة 2 :

أقصى كمية تدفق خلال هذا المسار

$$= \text{الأقل من } \{ \text{طاقة الطريق (1-4) , طاقة الطريق (4-7)} \}$$

$$= \text{الأقل من } \{ 4, 5 \} = 4$$

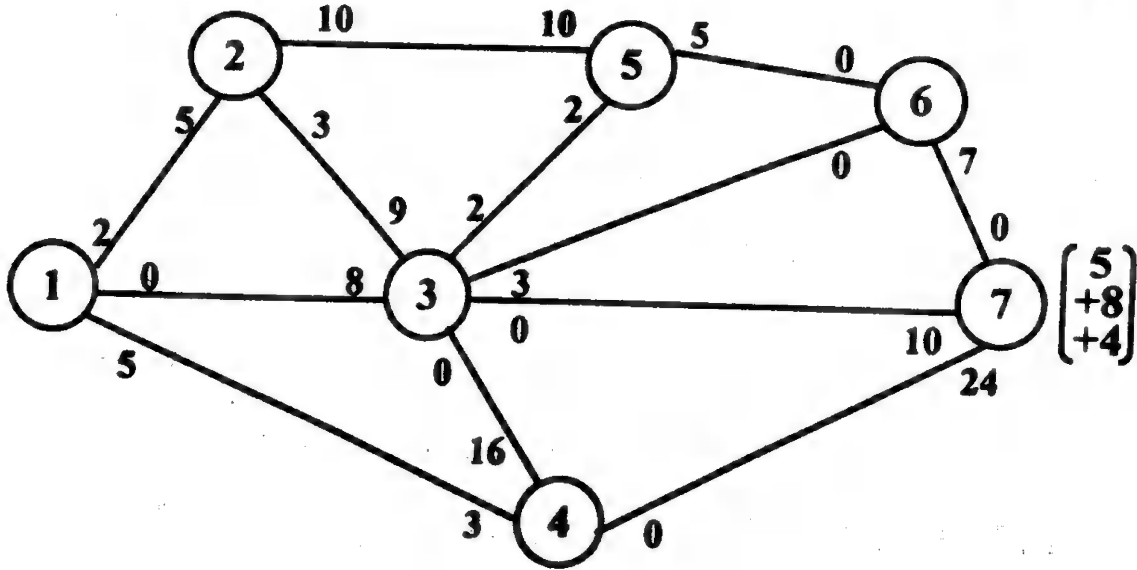
## الخطوة 3 :

يشحن 4 وحدات من المركبات من الحدث 1 إلى الحدث 7 ، أي يسلم 4 وحدات إلى الحدث 7 ، وتخفض طاقات الطرق (1-4) ، (4-7) بمقدار 4 وحدات ، وتزداد طاقات الطرق (4-1) ، (7-4) بمقدار 4 وحدات ، حيث تصبح طاقة الطريق (4-7) مساوية للصفر ويعتبر هذا الطريق كلز لم يكن .

الخطوة 4 :

نعيد رسم الشبكة بعد عمل التعديلات الواردة في الخطوة 3 كما يتضح

في الشبكة (د-٧) .



الشبكة (د-٧)

الخطوة 5 :

حيث أنه ما زال توجد مسارات أخرى بالشبكة تستوعب تدفق موجب

من الحدث 1 إلى الحدث 7 ، لذلك يتم الانتقال إلى الجولة التالية .

الجولة الرابعة :

الخطوة 1 :

نختار بشكل عشوائي مسار آخر من مسارات الشبكة الموضحة بالشبكة

(د-٧) يستوعب تدفق موجب وليكن المسار

$[ (1-2) , (2-5) , (5-6) , (6-7) ]$



## الخطوة 2 :

أقصى كمية تدفق خلال المسار المذكور

= الأقل من { طاقة الطريق (1-2) , طاقة الطريق (2-5) , طاقة الطريق (5-6) , طاقة الطريق (6-7) }

$$2 = \{ 7, 5, 10, 2 \}$$

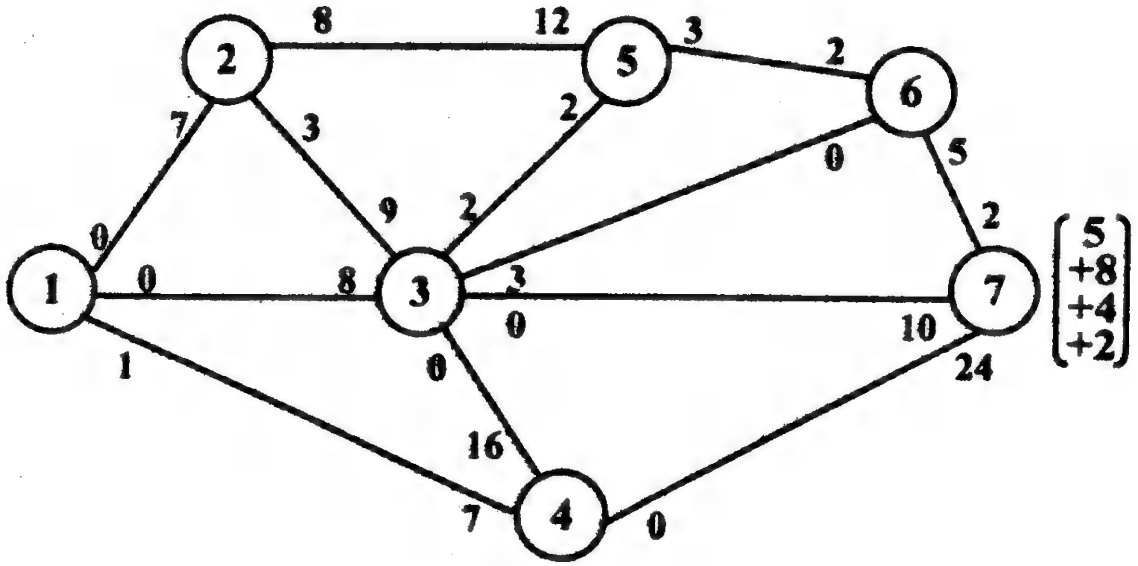
## الخطوة 3 :

يشحن وحدتين من المركبات من الحدث 1 إلى الحدث 7 ، بمعنى أن يسلم عدد 2 وحدة من المركبات إلى الحدث 7 ، وتخفض طاقات الطرق (1-2) ، (2-5) ، (5-6) ، (6-7) بمقدار 2 وحدة ، وتزداد طاقات الطرق (2-1) ، (5-2) ، (6-5) ، (7-6) بمقدار 2 وحدة ، وسوف تصبح طاقة الطريق (1-2) بعد عمل هذه التعديلات مساوية للصفر ، ومن ثم يعتبر هذا الطريق كأن لم يكن .

## الخطوة 4 :

نعيد رسم الشبكة بعد عمل التعديلات الواردة في الخطوة 3 من هذه

الجولة كما يتضح من الشبكة (٧ - هـ) .



الشبكة (٧ - هـ)

## الخطوة 5 :

بالنظر إلى الشبكة (٧ - هـ) يلاحظ أنه لم يعد يوجد بها أية مسارات تستوعب تدفق موجب من الحدث 1 حتى الحدث 7 ، وثم يكون قد تم التوصل إلى الحل الأمثل وهو :

أقصى كمية تدفق من المركبات يمكن أن ترسل من الحدث 1 إلى الحدث 7 بشبكة الطرق المبينة تساوي 19 ألف مركبة في الساعة .

ويمكن عرض جدول الشحن الأمثل بشكل تفصيلي على النحو التالي :

الجولة الأولى	شحن 5 آلاف مركبة من الحدث 1 إلى الحدث 2
	شحن 5 آلاف مركبة من الحدث 2 إلى الحدث 3
	شحن 5 آلاف مركبة من الحدث 3 إلى الحدث 7

الجولة الثانية

[	شحن 8 آلاف مركبة من الحدث 1 إلى الحدث 3
	شحن 8 آلاف مركبة من الحدث 3 إلى الحدث 4
	شحن 8 آلاف مركبة من الحدث 4 إلى الحدث 7

الجولة الثالثة

[	شحن 4 آلاف مركبة من الحدث 1 إلى الحدث 4
	شحن 4 آلاف مركبة من الحدث 4 إلى الحدث 7

الجولة الرابعة

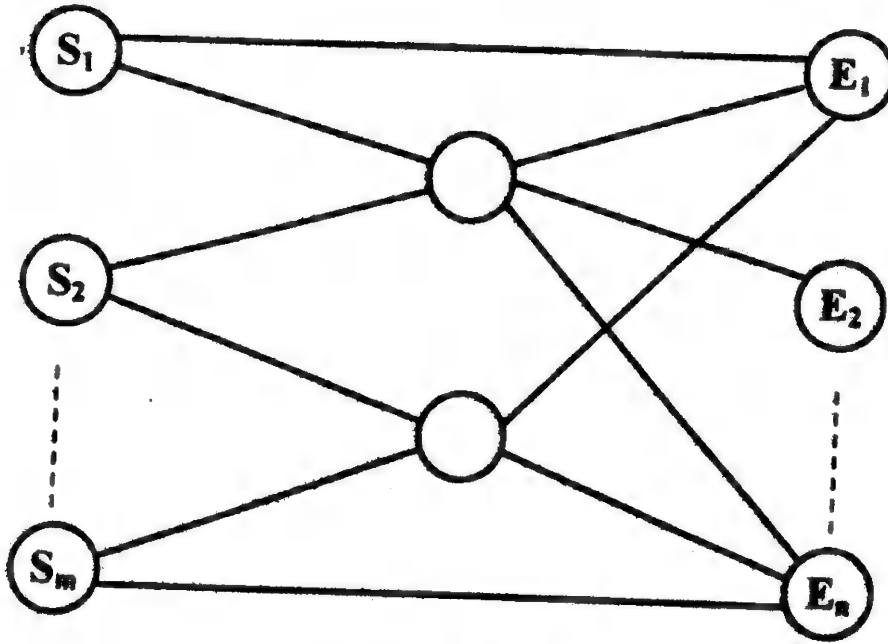
[	شحن ألفين مركبة من الحدث 1 إلى الحدث 2
	شحن ألفين مركبة من الحدث 2 إلى الحدث 5
	شحن ألفين مركبة من الحدث 5 إلى الحدث 6
	شحن ألفين مركبة من الحدث 6 إلى الحدث 7

### مشكلة أقصى تدفق في حالة تعدد المصادر والمصببات

أوضحنا فيما سبق معالجة شبكات التدفق في حالة ما إذا كانت الشبكة تحتوي على حدث بداية ( أي مصدر ) واحد وحدث نهاية ( أي مصب ) واحد ، ولكن قد يحدث في بعض الأحيان أن تتضمن شبكة التدفق عدداً من أحداث البداية ( المصادر ) Source Nodes ، وعدداً من أحداث النهاية ( المصببات ) Sink Nodes ، ويظهر ذلك في بعض أنواع شبكات التدفق أيضاً في حالة نموذج النقل والذي يشتمل بالطبع على عدد من مصادر العرض وعدد من جهات الاستخدام ونرغب في إعادة صياغة نموذج النقل في صورة شبكة تدفق .

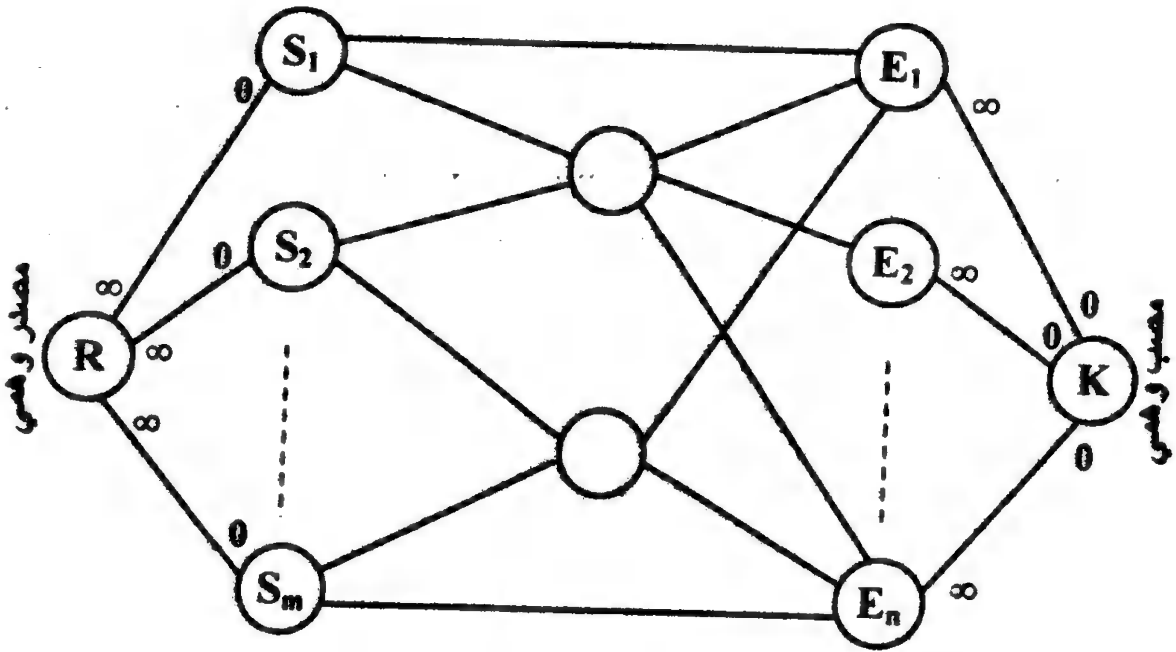
### أولاً : شبكات التدفق ذات المصادر المتعددة والمصببات المتعددة

إذا كان هناك شبكة تدفق تتضمن عدد  $m$  من المصادر ، عدد  $n$  من المصببات ، حيث :  $n \geq 2$  ,  $m \geq 2$  ، كما يتضح من الشكل التالي :



شكل ( ٥ - ١٤ )

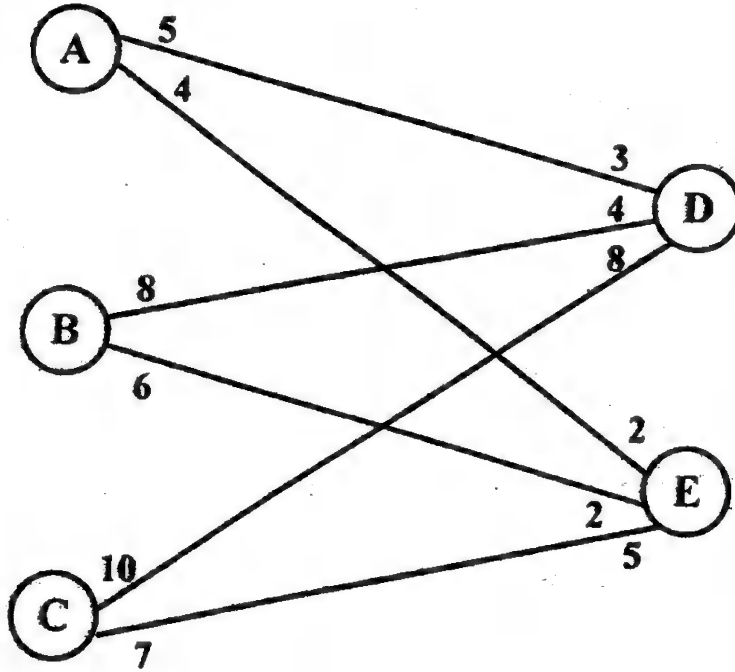
لتحديد أقصى كمية تدفق يمكن شحنها من المصادر إلى المصببات فيتعين أن يكون للشبكة حدث بداية ( أي مصدر ) وحدث نهاية ( أي مصب ) واحد ويتم ذلك عن طريق إدخال مصدر وهمي Dummy Source وتوصيله بالمصادر الرئيسية بالشبكة بأنشطة ( أو خطوط ) طاقة التدفق لكل منها تساوي مالاتهاية ، وإدخال مصب وهمي Dummy Sink وتوصيل المصببات الرئيسية بالشبكة بهذا المصب الوهمي بأنشطة ( أو خطوط ) طاقة التدفق لكل منها تساوي مالاتهاية وبذلك تتحول شبكة التدفق إلى شبكة ذات مصدر واحد ومصب واحد كما يتضح من الشكل التالي :



شكل (٥ - ١٥)

مثال (٨) :

شركة للنقل الجماعي تقوم بنقل الركاب من مدن الإسماعيلية والزقازيق والمنصورة والتي يرمز لها بالرموز  $C, B, A$  على الترتيب ، إلى مدينتي القاهرة والأسكندرية واللّتين يرمز لهما بالرمزين  $E, D$  على الترتيب ، والعكس ( أي من المدينتين  $E, D$  إلى المدن  $C, B, A$  ) . وتستخدم في ذلك وسائل نقل مختلفة في سعتها وتجهيزاتها وكانت الطاقة القصوى لنقل الركاب ( بالمائة راكب ) في الساعة بوسائل النقل المختلفة في كلا الاتجاهين كما هو موضح بالشبكة التالية :



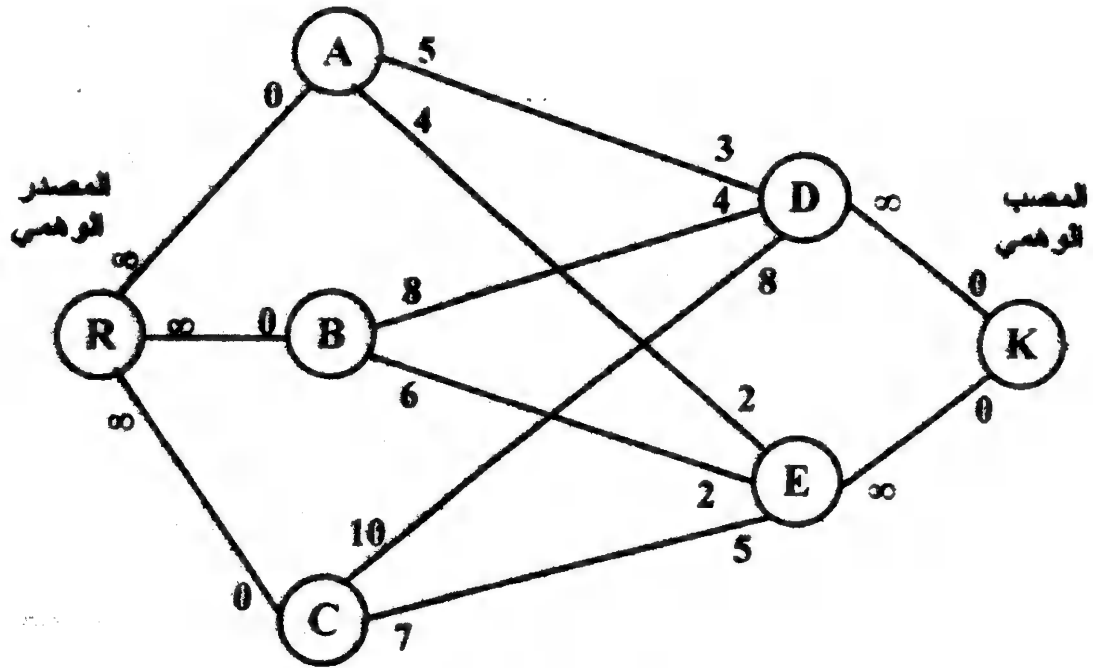
المطلوب :

تحديد أقصى كمية تدفق من الركاب في الساعة يمكن نقلها من المدن

• E , D إلى المدينتين C , B , A

الحل :

حيث أن شبكة النقل تتضمن ثلاثة مصادر ومصبين ، لذا يتعين إضافة مصدر وهمي يرمز له بالرمز R وتوصيله بالمصادر الثلاث الرئيسية بأنشطة الطاقة القصوى لكل منها في الاتجاه الأمامي تساوي مالاتهية ، وفي الاتجاه العكسي تساوي صفر وإيضاً إضافة مصب وهمي يرمز له بالرمز K وتوصيل كل من المصبين الرئيسيين بالمصب الوهمي بنشاطين الطاقة القصوى لكل منهما في الاتجاه الأمامي تساوي مالاتهية ، وفي الاتجاه العكسي تساوي صفر ، كما يتضح من الشبكة (٨-١) .



الشبكة (٨ - أ)

للحصول على أقصى كمية من الركاب من الحدث R إلى الحدث K يتم ذلك من خلال عدة جولات • وسوف نعرض منها الجولة الأولى بالتفصيل وتترك باقي الجولات للقارئ كي يجريها بنفسه على سبيل التدريب •

### الجولة الأولى :

تتضمن مجموعة الخطوات التالية :

#### الخطوة 1 :

يتم اختيار أي مسار من مسارات الشبكة بشكل عشوائي من الحدث R حتى الحدث K وليكن المسار  $[(R-B), (B-D), (D-K)]$  •

## الخطوة 2 :

أقصى كمية تدفق يمكن أن تنقل خلال هذا المسار تحسب كما يلي :

أقصى كمية تدفق

$$= \text{الأقل من } \{ \text{طاقة النشاط (R-B)}, \text{طاقة النشاط (B-D)} \}; \text{ طاقة النشاط (D-K)}$$

$$= \text{الأقل من } \{ \infty, 8, \infty \}$$

## الخطوة 3 :

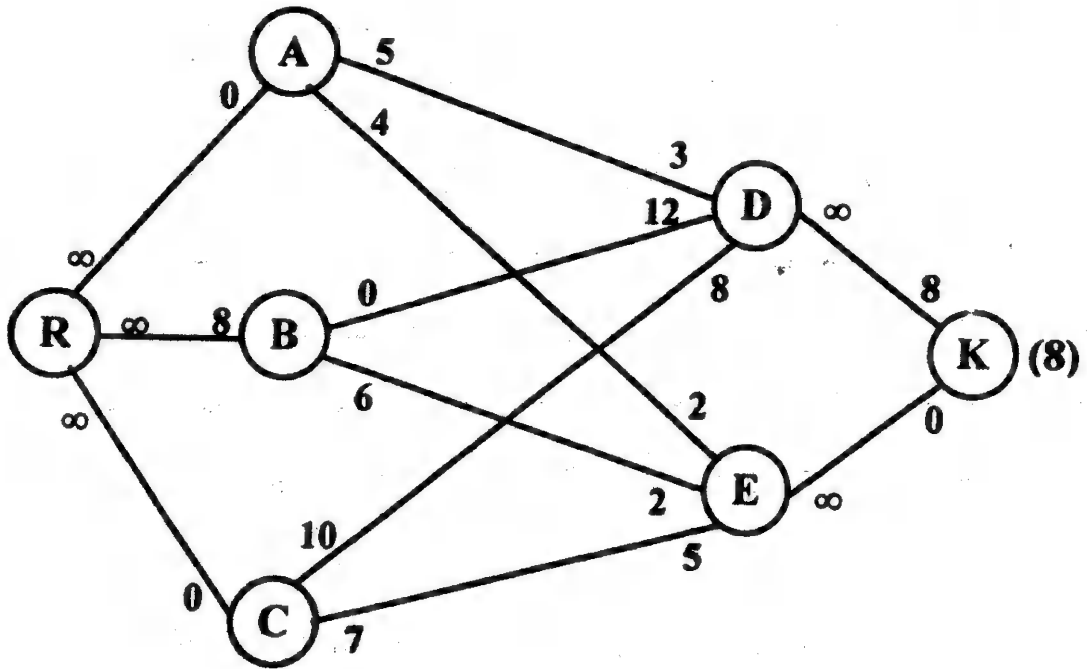
يتم شحن العدد 8 من الحدث R إلى الحدث K ، أي يسلم 8 وحدات إلى الحدث K ، وتخفض طاقات الأنشطة (R-B) ، (B-D) ، (D-K) بـ 8 وحدات ، وتزداد طاقات الأنشطة (B-R) ، (D-B) ، (K-D) بـ 8 وحدات وبعد ذلك سوف تصبح الطاقة المتاحة للنشاط (B-D) مساوية للصفر وبالتالي يمكن حذف هذا النشاط من الشبكة أو اعتباره كأن لم يكن .

## الخطوة 4 :

نعيد رسم للشبكة بعد عمل التعديلات المذكورة في الخطوة السابقة كما

هو موضح بالشبكة (٨ - ب) .





### الشبكة (٨ - ب)

## الخطوة 5 :

حيث أنه ما زالت توجد بالشبكة مسارات أخرى تستوعب تدفق موجب من المصدر R إلى المصب K ، فننتقل إلى الجولة الثانية فالثالثة وهكذا . تستمر جولات الحل وفي كل جولة نعيد الخطوات الخمسة سالفة الذكر حتى يتم التوصل إلى أقصى كمية تدفق من الركاب يمكن إرسالها من المصدر R إلى المصب K والتي سوف تساوي 40 وحدة في الساعة ( أي  $4000 = 40 \times 100$  ) راكب في الساعة .

## ثانياً : نموذج النقل وتحويله إلى شبكة تدفق

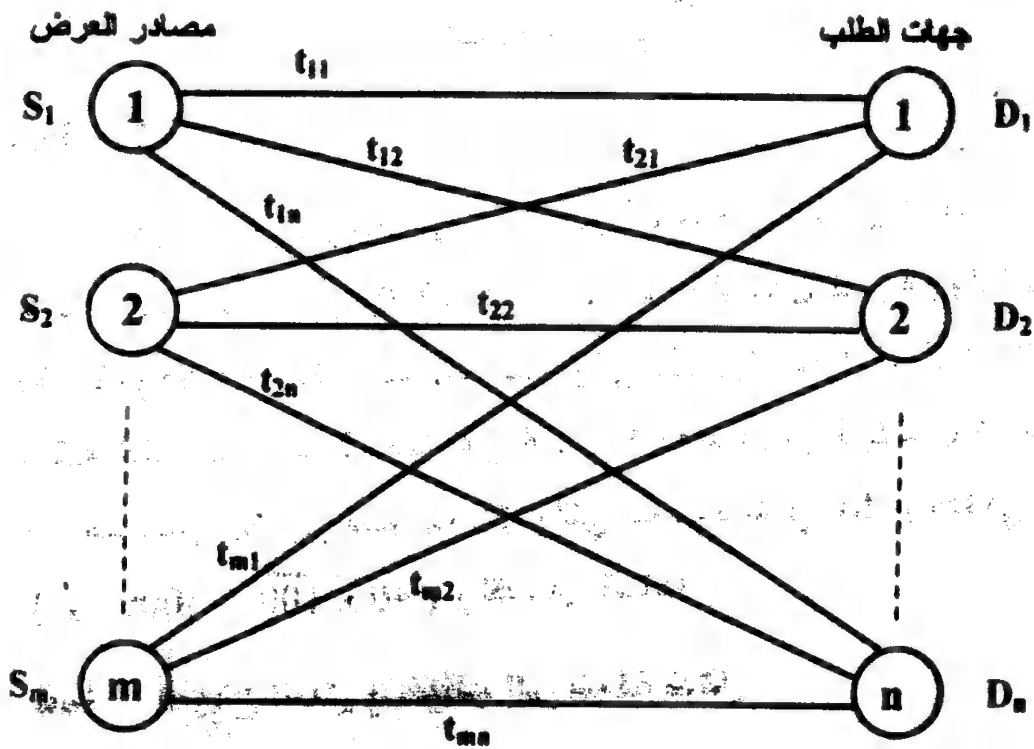
رأينا فيما سبق أن نموذج النقل يتكون من عدة عناصر هي :

أ - عدد  $m$  من مصادر العرض التي يتوفر لدى كل منها  $S_i$  (حيث  $i = 1, 2, \dots, m$ ) من الكميات المتاحة من السلعة .

ب - عدد  $n$  من جهات الطلب والتي يبلغ احتياج كل منها من السلعة  $D_j$  (حيث  $j = 1, 2, \dots, n$ ) .

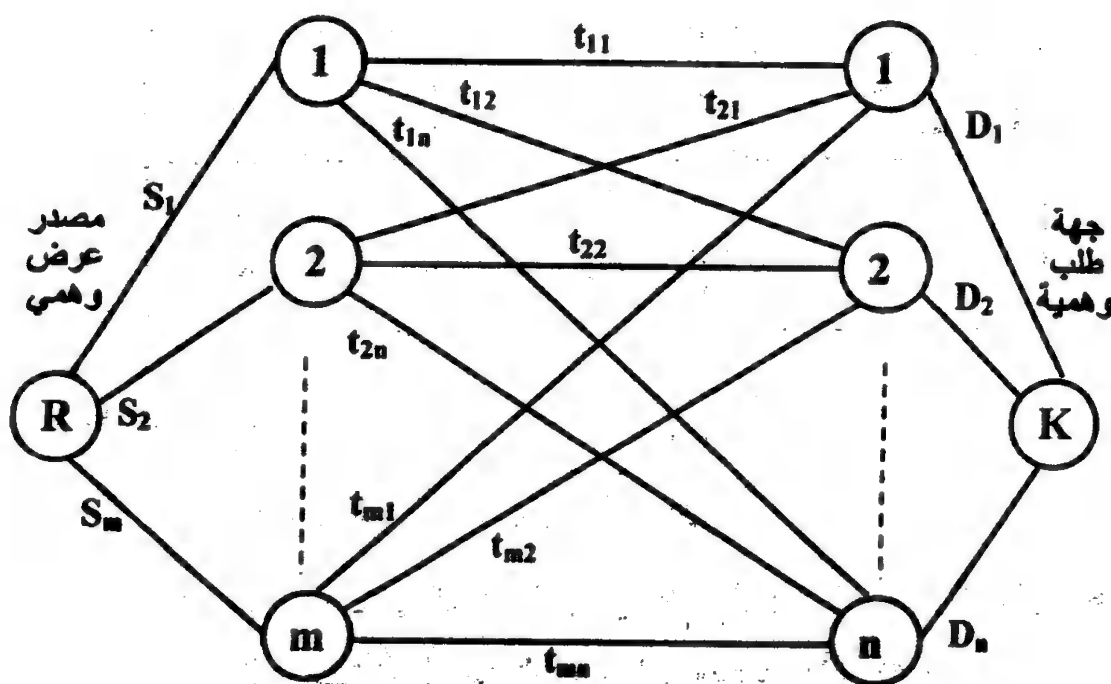
ج - المتغير  $t_{ij}$  (حيث  $i = 1, 2, \dots, m$  ;  $j = 1, 2, \dots, n$ ) والذي يمثل تكلفة نقل الوحدة (أو الربح المتحقق من نقل الوحدة أو الكمية التي يتم شحنها من السلعة في وحدة الزمن ... الخ) من المصدر  $i$  إلى جهة الطلب  $j$  .

ويمكن تمثيل عناصر نموذج النقل بيانياً بالشكل التالي :



شكل (٥ - ١٦)

فإذا كان المطلوب هو إيجاد أقصى كمية من السلعة يمكن شحنها من مصادر العرض إلى جهات الطلب فيفضل في هذه الحالة تحويل نموذج النقل السابق إلى شبكة تدفق متعددة المصادر ومتعددة المصببات ، ويلزم بطبيعة الحال تحويلها إلى شبكة تدفق لها مصدر واحد ومصب واحد ، ويتم ذلك عن طريق إضافة مصدر عرض وهمي ونصل بين هذا المصدر الوهمي ومصادر العرض المختلفة بأنشطة طاقة التدفق لها هي الكميات المعروضة في مراكز العرض ، أي  $S_i, (i = 1, 2, \dots, m)$  ، ثم إضافة جهة طلب وهمية ونصل بين جهات الطلب المختلفة وهذا المصب الوهمي بأنشطة طاقة التدفق لها هي الكميات المطلوبة في جهات الطلب ، أي  $D_j, (j = 1, 2, \dots, n)$  ، كما يتضح من الشكل (٥ - ١٧) .



شكل (٥ - ١٧)

ويمكن استخدام طريقة فورد وفولكرسون للحصول على أقصى كمية

تدفق يمكن شحنها من المصدر R إلى المصب K .

مثال (٩) :

بفرض أن شركة لديها مزرعتين للأسماك يرمز لهما بالرمزين A , B ، طاقتهما الإنتاجية السنوية من الأسماك (بالآلف طن) هي على الترتيب 35 ، 25 . وترغب الشركة في تصدير إنتاجها إلى ثلاث مراكز استيراد يرمز لها بالرموز E , D , C ، وتبلغ احتياجاتها السنوية القصوى من الأسماك (بالآلف طن) ، على الترتيب : 15 , 17 , 28 .

وبفرض أن عملية التصدير تتم بوسائل نقل ذات حمولات مختلفة

(بالآلف طن) كما هو مبين بالجدول التالي :

مركز الاستيراد المزرعة	C	D	E
A	5	3	8
B	10	7	9

المطلوب :

١ - تحويل نموذج النقل إلى شبكة تدفق .

٢ - إيجاد أقصى كمية تدفق من الأسماك (بالآلف طن) يمكن شحنها

في وحدة الزمن من المصدر إلى المصب بالشبكة .

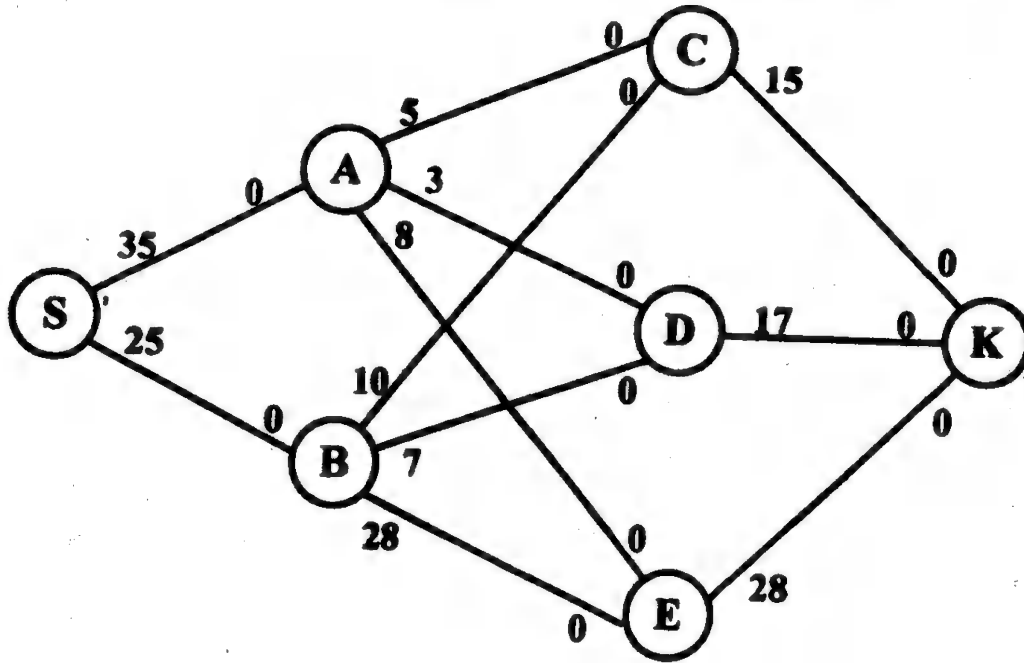
الحل :

يمكن عرض نموذج النقل بعد إضافة للطاقت الإنتاجية القصوى للمزارع والاحتياجات القصوى لمراكز الاستيراد إلى مصفوفة الشحن كما يلي :

مركز الاستيراد المزرعة	C	D	E	إجمالي العرض
A	5	3	8	35
B	10	7	9	25
إجمالي الطلب	15	17	28	

١ - لتحويل نموذج النقل إلى شبكة تدفق تضاف مزرعة وهمية يرمز لها بالرمز S ، ونصل بين هذا المصدر الوهمي وبين المزرعتين السمكيتين بنشاطين هما : (S-A) , (S-B) ، وطاقة التدفق القصوى لهما هي على الترتيب : 35 ، 25 ، ويضاف أيضاً مركز استيراد وهمي ( أي مصب وهمي ) يرمز له بالرمز K ، ونصل بين مراكز الاستيراد وبين المصب الوهمي بأنشطة هي : (C-K) , (D-K) , (E-K) طاقة التدفق القصوى لها هي على الترتيب : 15 , 17 , 28 .

وحيث أنه غير مسموح بالشحن في الاتجاه المضاد ( أي من مركز الاستيراد إلى مركز التصدير ) فسوف يوضع في نهاية كل نشاط من أنشطة الشبكة القيمة صفر ، ويتضح ذلك في شبكة التدفق التالية :



الشبكة (٩ - ١)

للحصول على أقصى كمية تدفق من الأسماك من الحدث S إلى الحدث K يتم ذلك من خلال عدة جولات على النحو التالي :

**الجولة الأولى :**

تتضمن الخطوات التالية :

**الخطوة 1 :**

يتم اختيار أي مسار من مسارات الشبكة بشكل عشوائي من الحدث S إلى الحدث K وليكن المسار  $[(C-K), (A-C), (S-A)]$  .

**الخطوة 2 :**

أقصى كمية تدفق للمسار

= الأقل من { طاقة النشاط (S-A) , طاقة النشاط (A-C) , طاقة  
النشاط (C-K) }  
= الأقل من { 15 , 5 , 35 } 5

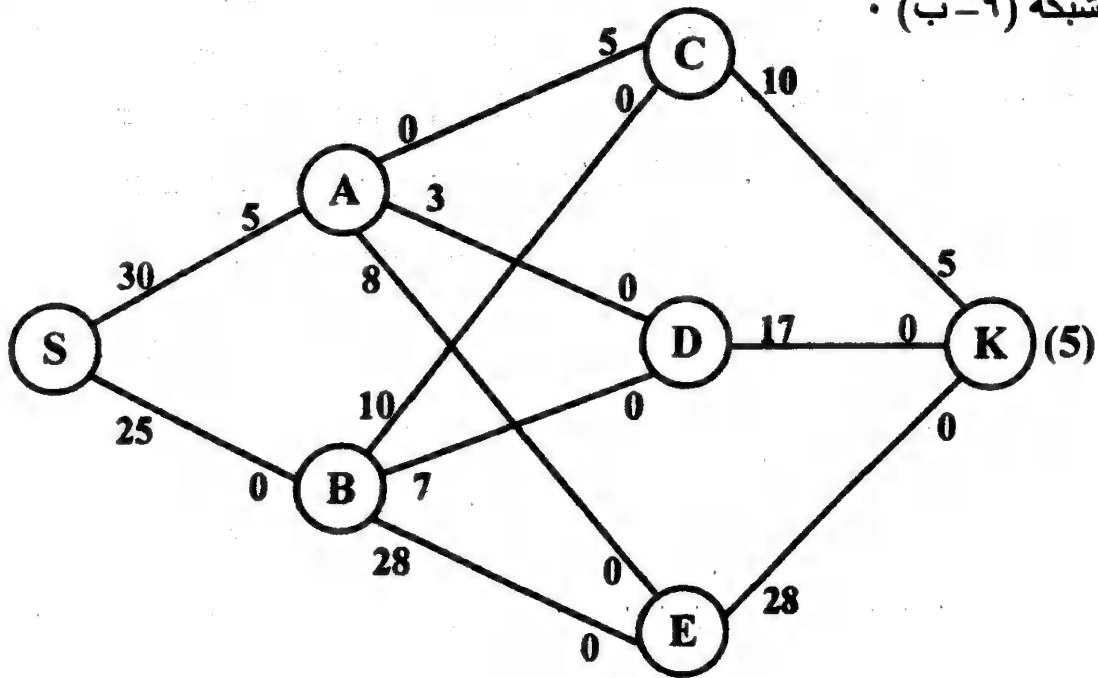
الخطوة 3 :

يتم شحن 5 وحدات من الحدث S إلى الحدث K ، وتخفض طاقات  
الأنشطة (S-A) ، (A-C) ، (C-K) بمقدار 5 وحدات ، وتزداد طاقات  
الأنشطة (A-S) ، (C-A) ، (K-C) بمقدار 5 وحدات ، وسوف تصبح  
طاقة النشاط (A-C) مساوية للصفر فيمكن حذفه من الشبكة أو اعتباره كان  
لم يكن .

الخطوة 4 :

نعيد رسم شبكة التدفق بعد عمل التعديلات المذكورة كما يتضح من

الشبكة (٩-ب) .



الشبكة (٩-ب)

الخطوة 5 :

حيث أنه ما زال توجد بالشبكة مسارات أخرى تستوعب تدفق موجب من الحدث S حتى الحدث K ، لذا ننتقل إلى الجولة التالية .

الجولة الثانية :

الخطوة 1 :

يتم اختيار مسار آخر بالشبكة بشكل عشوائي وليكن المسار  
• [ (E-K) , (A-E) , (S-A) ]

الخطوة 2 :

أقصى كمية تدفق خلال هذا المسار = الأقل من ( 28 , 8 , 30 ) = 8

الخطوة 3 :

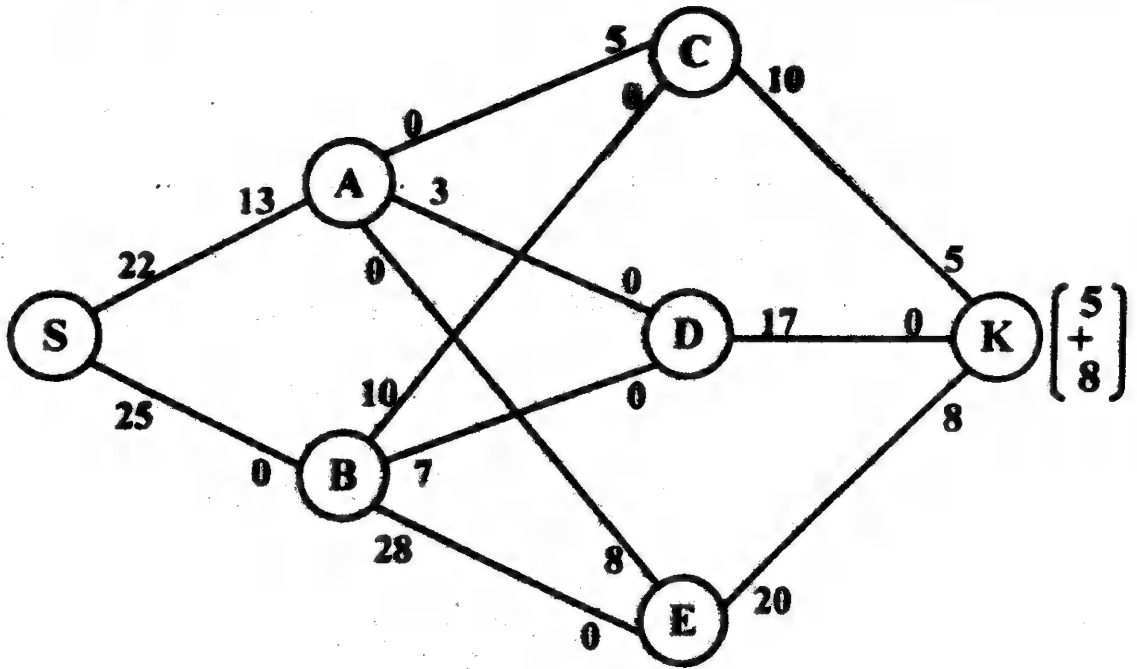
يرسل 8 وحدات من المصدر S وتسلم للمصبب K ، ثم تخفض طاقات الأنشطة (S-A) , (A-E) , (E-K) بمقدار 8 وحدات ، وتزداد طاقات الأنشطة (A-S) , (E-A) , (K-E) بمقدار 8 وحدات ، بعد ذلك سوف تصبح الطاقة المتاحة للنشاط (A-E) مساوية للصفر .

الخطوة 4 :

نعيد رسم الشبكة بعد عمل التعديلات السابقة كما يتضح من الشبكة

• ( ٩ - ج )





الشبكة (٩ - ج)

الخطوة 5 :

ما زال بالشبكة مسارات تستوعب تدفق موجب من الحدث S إلى الحدث K ، لذا ننتقل إلى الجولة التالية .

الجولة الثالثة :

الخطوة 1 :

يختار مسار آخر بالشبكة بشكل عشوائي وليكن المسار [ S-A )

• [ (D-K) , (A-D) ,

الخطوة 2 :

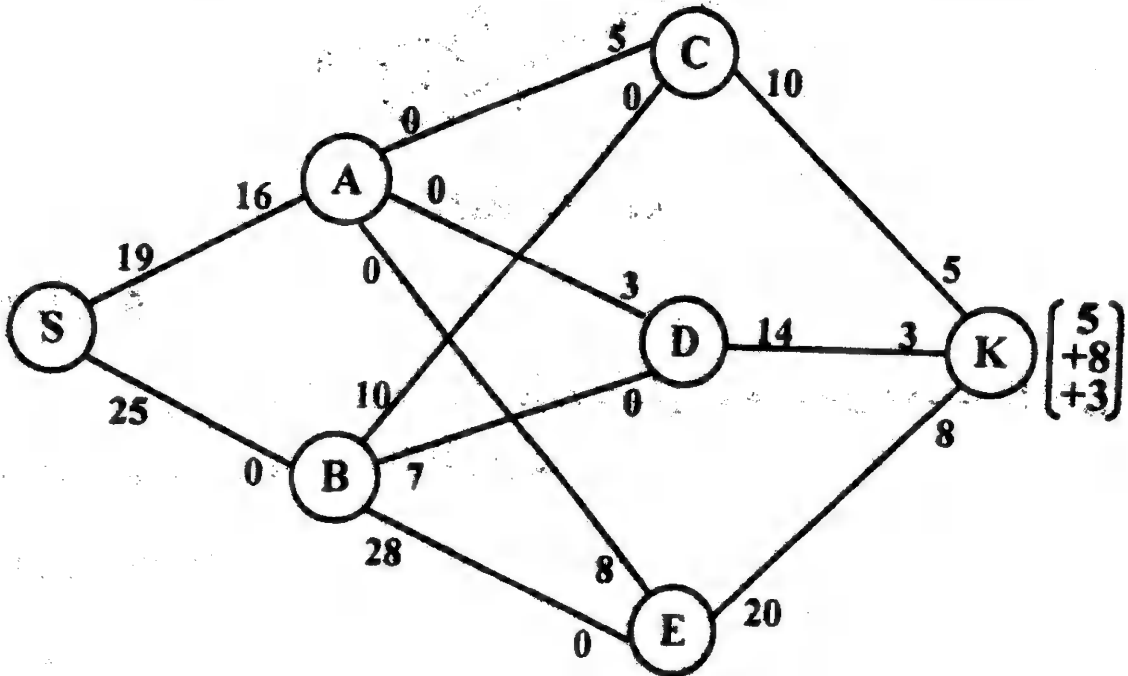
أقصى كمية تدفق خلال هذا المسار = الأقل من ( 17 , 3 , 22 ) = 3

## الخطوة 3 :

ترسل 3 وحدات من المصدر S إلى المصب K وتخفيض طاقات الأنشطة (S-A) , (A-D) , (D-K) بمقدار 3 وحدات ، في حين تزداد طاقات الأنشطة (A-S) , (D-A) , (K-D) بمقدار 3 وحدات .

## الخطوة 4 :

يتم رسم شبكة الشحن بعد عمل هذه التعديلات كما يلي :



الشبكة (٩-د)

## الخطوة 5 :

ما زال موجوداً بالشبكة مسارات تستوعب تدفق موجب من المصدر إلى المصب فننتقل إلى الجولة التالية :

الخطوة الرابعة :

الخطوة 1 :

يتم اختيار مسار آخر بالشبكة بصورة عشوائية وليكن المسار

$$\bullet [(E-K), (B-E), (S-B)]$$

الخطوة 2 :

أقصى كمية تدفق خلال هذا المسار = الأقل من ( 20 , 28 , 25 ) = 20

الخطوة 3 :

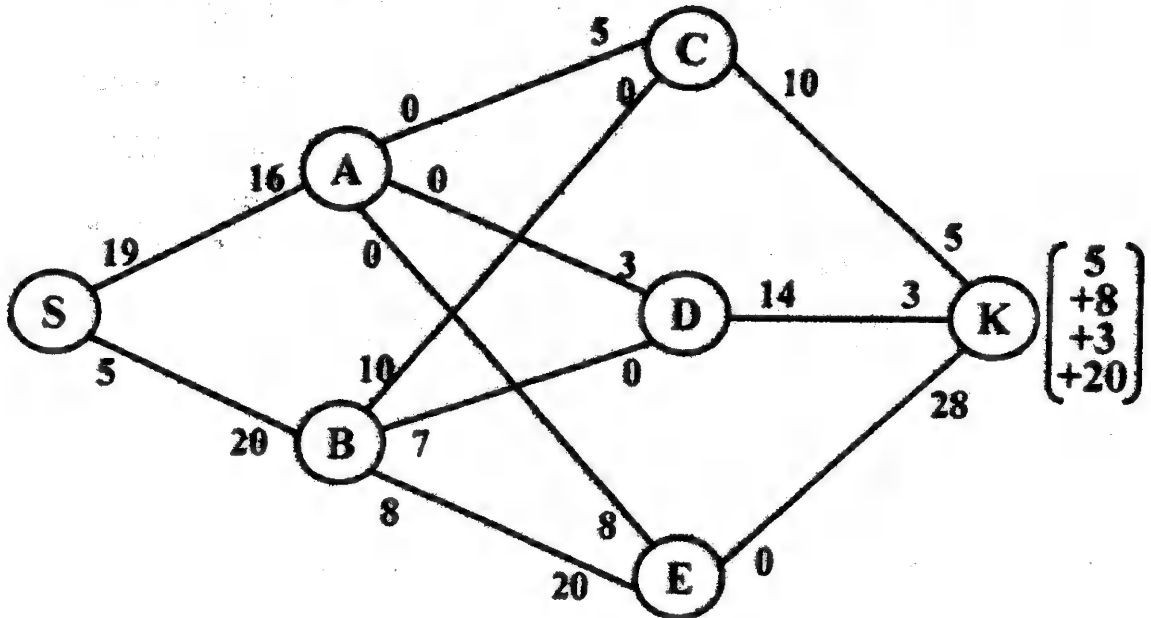
ترسل 20 وحدة من المصدر S وتسلم للمصبب K ، وتخفض

طاقات الأنشطة (S-B) ، (B-E) ، (E-K) بمقدار 20 وحدة وتزداد طاقات

الأنشطة (B-S) ، (E-B) ، (K-E) بمقدار 20 وحدة .

الخطوة 4 :

يتم رسم شبكة التدفق بعد عمل تلك التعديلات على النحو التالي :



الشبكة ( ٩ - هـ )

### الخطوة 5 :

ما زالت الشبكة تحتوى على مسارات تستوعب تدفق موجب ، لذا يتم الانتقال إلى جولة تالية .

### الجولة الخامسة :

#### الخطوة 1 :

يتم اختيار أحد مسارات الشبكة التي تستوعب تدفق موجب بشكل عشوائي وليكن المسار  $[(C-K), (B-C), (S-B)]$  .

#### الخطوة 2 :

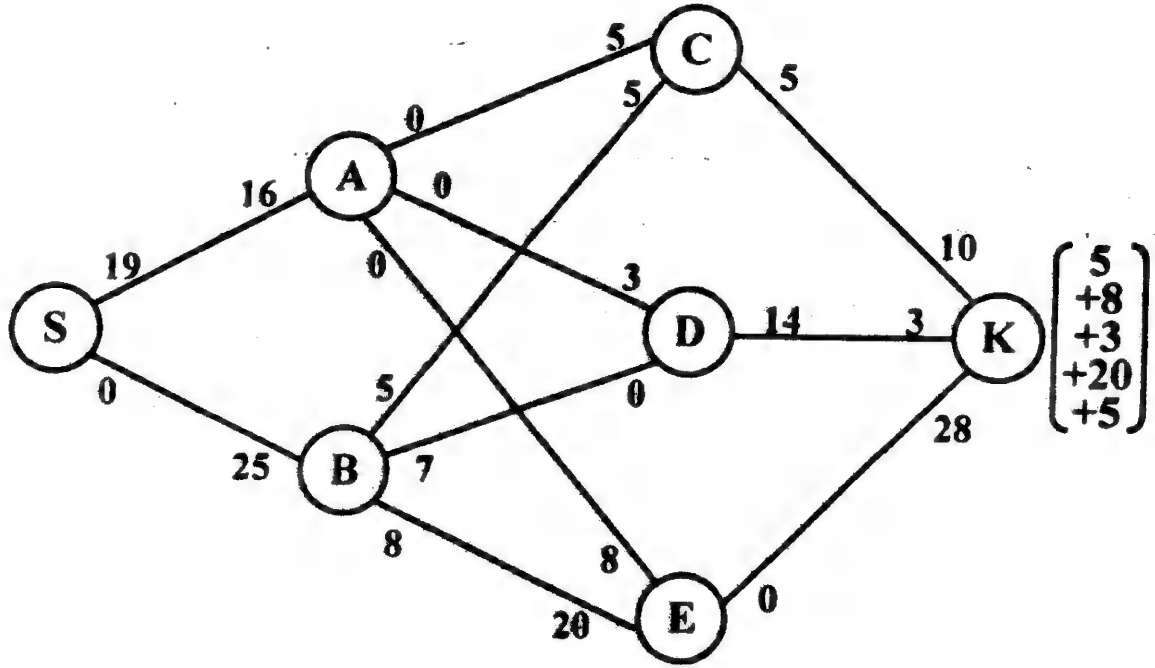
أقصى كمية تدفق خلال هذا المسار = الأقل من  $(10, 10, 5)$  = 5

#### الخطوة 3 :

ترسل 5 وحدات من المصدر S إلى المصب K ، وتخفض طاقات الأنشطة  $(S-B)$  ،  $(B-C)$  ،  $(C-K)$  بمقدار 5 وحدات ، في حين تزداد طاقات الأنشطة  $(B-S)$  ،  $(C-B)$  ،  $(K-C)$  بنفس المقدار وهو 5 وحدات .

#### الخطوة 4 :

نعيد رسم الشبكة بعد عمل تلك التعديلات على النحو التالي :



الشبكة (٩ - ٥)

الخطوة 5 :

وكما هو واضح فلم يعد يوجد بشبكة التدفق الأخيرة (٩ - ٥) أي مسار يربط بين المصدر S والمصب K يستوعب تدفق موجب ومن ثم يكون قد تم التوصل إلى الحل الأمثل ، حيث :

أقصى كمية تدفق من الأسماك يمكن أن ترسل من المصدر S إلى المصب K ( أي من المزارع السمكية إلى مراكز الاستيراد ) تساوي 41 ألف طن .



## الباب السادس

### نظرية صفوف الانتظار

◎ (١-٦) مقدمة

◎ (٢-٦) عناصر صفوف الانتظار

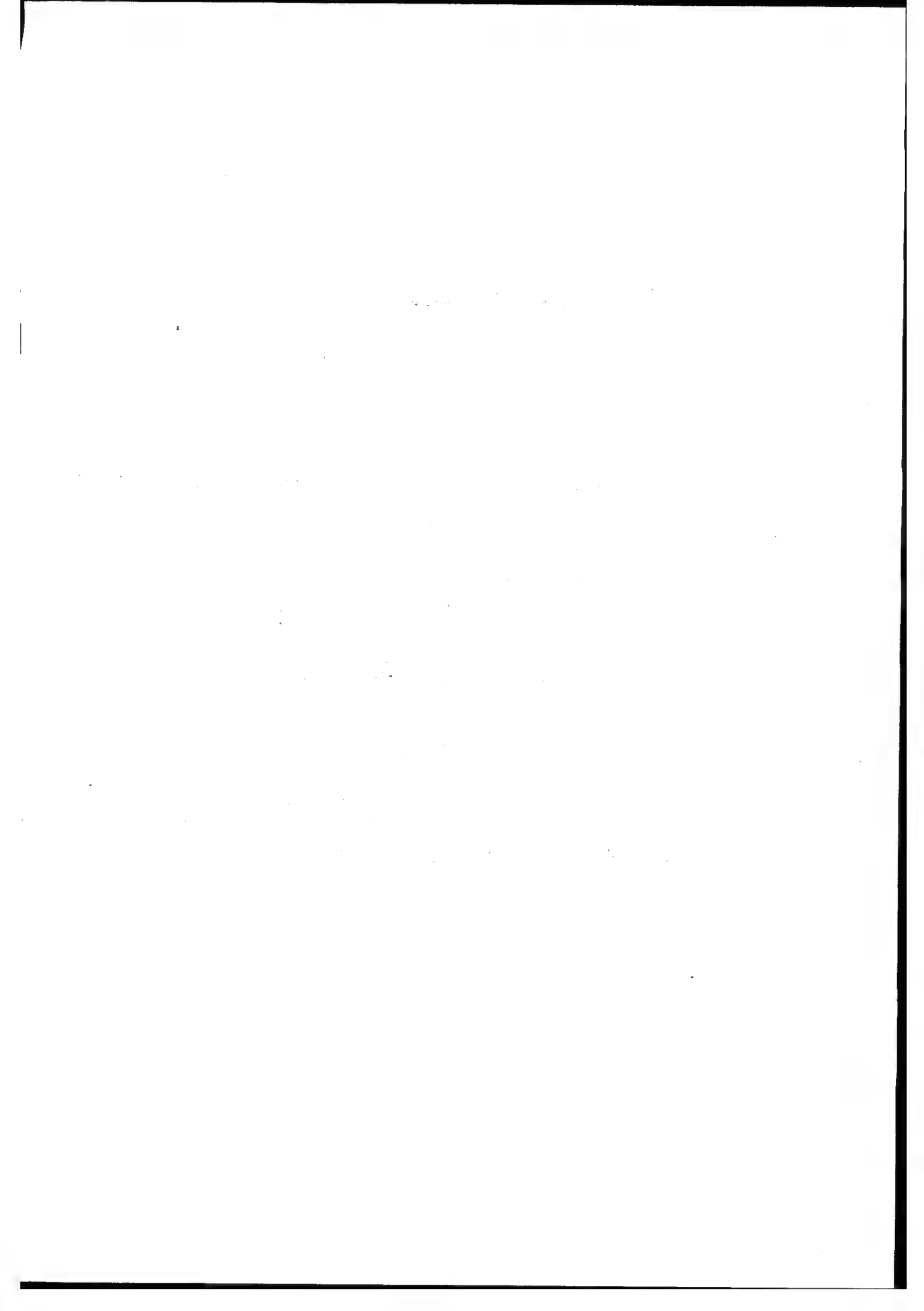
◎ (٣-٦) بعض نماذج صفوف الانتظار

◀ (١-٢-٦) صف انتظار واحد ومركز خدمة واحد ( $M/M/1$ )

◀ (٢-٣-٦) صف انتظار واحد وعدة مراكز خدمة على التوازي

( $M/M/K$ )

◎ (٤-٦) تحليل التكاليف لصفوف الانتظار





## الباب السادس نظرية صفوف الانتظار Queuing Theory

### (١-٦) مقدمة

تعتبر ظاهرة الانتظار من الظواهر المألوفة والشائعة في حياتنا لدرجة أنها أصبحت تمثل جزء من حياتنا اليومية ، فقلما يوجد إنسان في المجتمع المعاصر لم يقف في صف انتظار للحصول على خدمة ما . ولنا أن نتصور المواقف التالية :

- وقوف الأفراد في طوابير أمام الأفران واكشاك الخبز .
- وقوف العملاء أمام المحصل لدفع ثمن مشترياتهم في السوبرماركت .
- وقوف العملاء في طابور لصرف الرواتب أو لصرف شيكات في البنوك .
- وقوف المرضى في طوابير للكشف الطبي أو لصرف الدواء في العيادات الخارجية بالمستشفيات .
- وقوف السيارات في صفوف أمام إشارات المرور .
- وقوف السيارات في صفوف وانتظارها أمام محطة البنزين .
- الآلات والماكينات المعطلة في انتظار الصيانة والإصلاح .
- الطائرات في انتظار الأمر بالإقلاع من الممر أو بالهبوط فيه .
- وقوف السفن في صفوف خارج البوغاز في انتظار الدخول للتفريغ أو الشحن .
- القضايا في المحاكم في انتظار الحكم فيها .
- المطالب المنزلية المتعددة في حياة كل إنسان في انتظار تلبيتها .

ففي مثل هذه المواقف وما شابهها ينشأ طابور أو صف انتظار ، وعلى ذلك فإن الطابور أو صف الانتظار يمثل عدد من الوحدات ( أفراد ، سيارات ، سفن ، طائرات ، آلات ، قضايا ، . . . الخ ) تقف على شكل طابور في انتظار الحصول على خدمة ، وذلك في حالة انشغال مقدمي الخدمة ، ثم يحصلون في النهاية على الخدمة ثم يغادرون مكان الخدمة .

وتنشأ صفوف الانتظار إذا كان معدل وصول العملاء أكبر من معدل أداء الخدمة لهم ، أو إذا كان معدل وصول العملاء أقل من معدل أداء الخدمة لهم ، وفي الحالة الأخيرة ينشأ صف انتظار ولكنه سيكون من جانب مقدم الخدمة يتمثل في انتظار مركز الخدمة لعملاء جدد حيث ستكون هناك طاقة عاطلة متمثلة في وقت بدون عمل يمكن الاستفادة منه .

وإذا قررت المنظمة زيادة للطاقة الخدمية لديها وأسرفت في زيادة عدد مراكز الخدمة حتى لا ينتظر العملاء كثيراً فإن ذلك يمثل هدراً لمواردها بسبب وجود طاقة غير مستغلة ، وعلى الجانب الآخر ، إذا قررت المنشأة تقليل الطاقة الخدمية لديها وقللت من مراكز الخدمة سوف يترتب على ذلك صف انتظار طويل غالباً ما يصاحبه أن تفقد المنظمة عدداً كبيراً من عملائها لاستيائهم من طول الانتظار ويتحولون إلى منظمات أخرى للحصول على الخدمة .

ومما يزيد الموقف صعوبة أن معدلات وصول العملاء إلى مراكز الخدمة يتم بشكل عشوائي ، كما أن معدلات أداء الخدمة للعملاء يتم أيضاً بشكل عشوائي .

وتمثل نظرية صفوف الانتظار أداة تحليلية تمكن من اشتقاق مقاييس ومعدلات تساعد على تصميم النظام بشكل يحقق التوازن بين تكلفة

الخدمة وتكلفة انتظار الحصول على الخدمة وهو ما يعرف بالتصميم الأمثل لأداء الخدمة .

وتاريخياً يعد إيرلنج منذ أوائل عام ١٩١٠ أول من طبق نظرية صفوف الانتظار في تصميم نظام الطلب على المكالمات التليفونية ، حيث وجه جهوده في البداية لدراسة التأخير بالنسبة لعامل تشغيل ( أي مركز خدمة ) واحد ثم عمم نتائج دراسته لتشمل عدد من عمال التشغيل ( أي عدة مراكز خدمة ) . ثم شاع استخدام نظرية صفوف الانتظار خلال الحرب العالمية الثانية ، ومنذ ذلك التاريخ وحتى الآن تنوعت تطبيقات نظرية صفوف الانتظار في شتى مجالات الحياة مثل مجالات الاتصال والنقل والإنتاج والخدمات الاجتماعية . . . الخ .

#### (٦-٢) عناصر صفوف الانتظار

يتكون صف الانتظار من خمسة عناصر أساسية هي :

- ١ - نمط أو توزيع وصول العملاء .
- ٢ - نمط أو توزيع وقت الخدمة .
- ٣ - عدد مراكز الخدمة .
- ٤ - نظام تقديم الخدمة .
- ٥ - مجتمع العملاء الطالب للخدمة .

وسوف نتناول كل عنصر من هذه العناصر بشيء من التفصيل :

#### Arrival Distribution

#### ١ - توزيع وصول العملاء

كلمة العملاء هنا تعني طالبي الخدمة أيًا كان نوعهم ، فقد يكونوا أفراد ، سيارات ، سفن ، آلات أو أجهزة بها عطل ، قضايا تنتظر الحكم فيها ، . . . الخ .

ومعدل وصول العملاء يعني عدد العملاء الذين يصلون إلى مكان الخدمة خلال فترة زمنية محددة ، فقد يصل العملاء إلى مكان الخدمة بمعدل ثابت ( ثلاثة عملاء كل ساعة مثلاً ) ، ولكن ليس هذا هو الموقف العادي ، ففي معظم الحالات يصل العملاء إلى مكان الخدمة بمعدلات مختلفة وبطريقة عشوائية ، أي أن كل وصول يكون مستقلاً عن الوصول الآخر ولا يمكن التنبؤ بحدوث الوصول . ولقد اتفق العلماء على أن العملاء يصلون إلى مكان الخدمة وفق توزيع احتمالي معروف وهو توزيع بواسون Poisson Distribution ، وبالتطبيع فإن توزيع بواسون ليس هو التوزيع الوحيد في هذه الحالة ، فقد يصل العملاء إلى مكان الخدمة وفق توزيعات احتمالية أخرى مثل توزيع إيرلانج أو التوزيع فوق الهندسي ، إلا أن توزيع بواسون يعد هو الأفضل والأكثر شيوعاً لوصف معدل الوصول العشوائي ، والذي يفترض أن عدد العملاء الذين يصلون إلى الصف هو متغير عشوائي ولكن بمتوسط معدل وصول ثابت يرمز له بالرمز  $\lambda$  ، والذي يشير إلى عدد العملاء الذين يصلون إلى النظام في وحدة الزمن الواحدة .

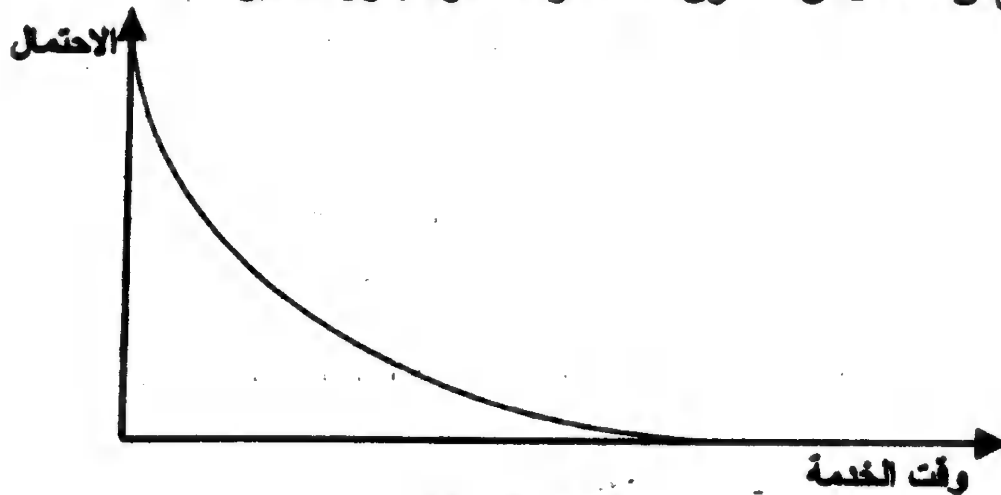
وأيضاً فيما يتعلق بنمط وصول العملاء فقد يصل العملاء منفردين أو في مجموعات ، وقد يوجد افتراضات غير عادية عن سلوك العملاء مثل التزامم ( أو التزم ) ومثل التخطي ، ويحدث التزامم ( أو التزم ) عندما يرفض العميل الذي يصل الدخول إلى مكان الخدمة بسبب طول صف الانتظار ، بينما يحدث التخطي عندما يترك أحد العملاء الموجودين أصلاً في الصف مكانه بسبب طول صف الانتظار . وما لم ينص صراحة على تلك الافتراضات غير العادية عن نمط وصول العملاء فإنه يفترض أن يصل العملاء منفردين ولا يحدث تزامم أو تخطي في صف الانتظار .

ومن الناحية التطبيقية فعلى الباحث أن يقوم بتسجيل العدد الفعلي للعملاء الذين يصلون إلى النظام المدروس في كل فترة زمنية لبضعة أيام أو بضعة أسابيع أو حتى بضعة شهور ويستخدم التوزيع التكراري المتحصل عليه في اختبار ما إذا كان توزيع بواسون يمثل توفيقاً جيداً لتوزيع وصول العملاء .

## ٢ - توزيع وقت الخدمة Service Distribution

يقصد بوقت الخدمة زمن أداء الخدمة للعميل أو الزمن الذي يستغرقه العميل في مركز الخدمة منذ اللحظة التي يبدأ عندها تقديم (أو طلب) الخدمة حتى إتمام الخدمة ، وقد يكون هذا الزمن ثابتاً أو متغيراً عشوائياً . وقد وجد العلماء أن أفضل توزيع احتمالي يمثل وقت الخدمة هو التوزيع الأسّي Exponential Distribution والذي يفترض أن متوسط معدل أداء الخدمة هو  $\mu$  ، والذي يشير إلى عدد العملاء الذين يتم خدمتهم في وحدة الزمن الواحدة .

والشكل (٦ - ١) يبين منحنى التوزيع الأسّي لوقت الخدمة للعميل والذي يوضح أن احتمال أن تستغرق الخدمة زمناً أطول يكون صغيراً .



شكل (٦ - ١)

### ٣ - عدد مراكز الخدمة Number of Service Channels

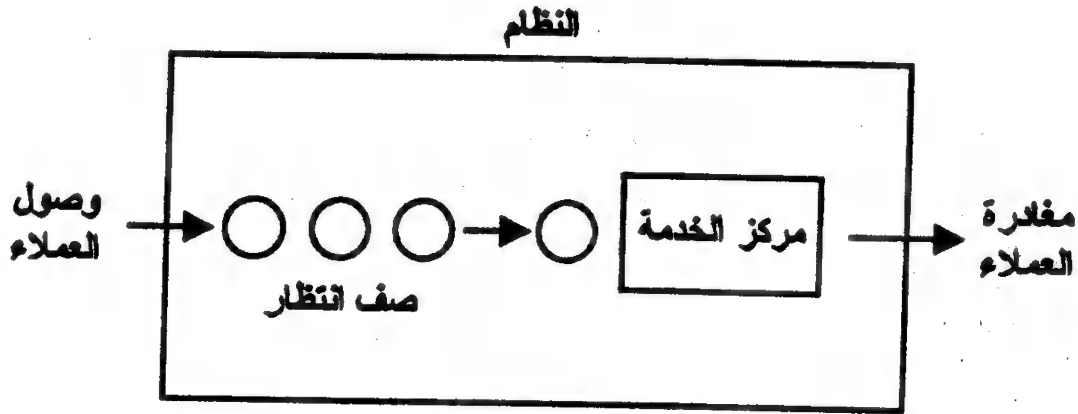
يوجد عدة نماذج لنظام صفوف الانتظار لعل من أهمها ما يلي :

#### ١ - نظام الصف الواحد ومركز خدمة واحد

يقصد بمركز الخدمة ( وأحياناً يطلق عليه قناة الخدمة ) الشخص أو الشيء الذي يقدم الخدمة اللازمة للعميل ، ومن أمثل هذا النظام ما يلي :

- انتظار المرضى في عيادة طبيب .
- انتظار السيارات في محطة بنزين بها طلمبة بنزين واحدة .
- انتظار الأفراد أمام شباك تذاكر السينما أو المسرح .
- انتظار الأفراد أمام كشك واحد لبيع الخبز .

ويعبر عن هذا النظام بيانياً في الشكل ( ٦ - ٢ )



شكل ( ٦ - ٢ )

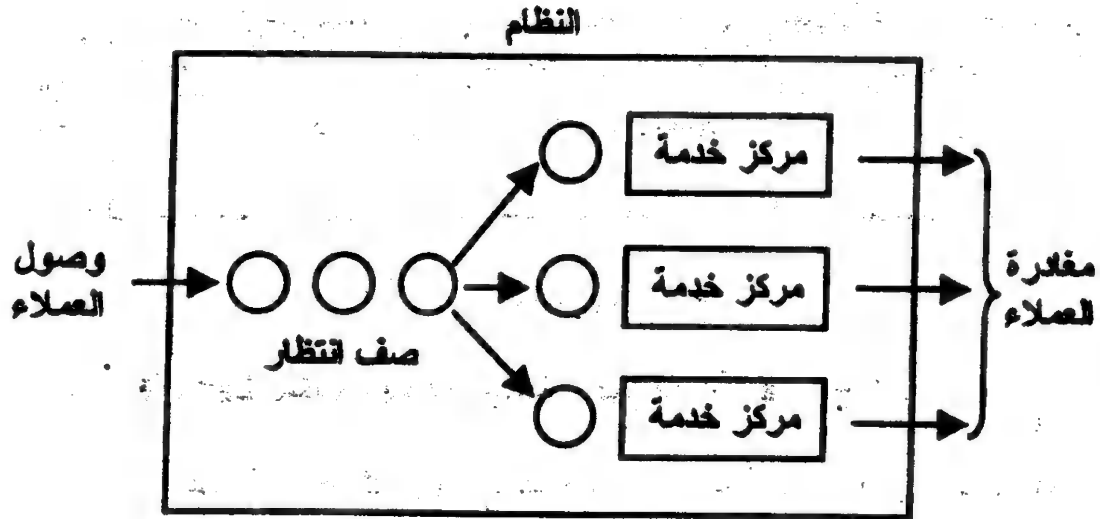
#### ب - نظام الصف الواحد وعدة مراكز خدمة على التوازي

وفقاً لهذا النظام يمكن تقديم الخدمة لعدد من العملاء في نفس الوقت ،

ومن أمثلة ذلك ما يلي :

- انتظار السيارات في محطة بنزين بها عدد من طلمبات البنزين .
- انتظار العملاء في أحد البنوك لصرف الشيكات أو الرواتب إذا كان هناك أكثر من شباك للصرف .

ويعبر عن هذا النظام بيانياً في الشكل (٦ - ٣)



شكل (٦ - ٣)

ج - نظام الصف الواحد وعدة مراكز خدمة على التوالي

ويحدث ذلك عندما يتعين على العميل المرور على عدة مراكز للخدمة المتتالية حيث ينجز كل مركز جزء من الخدمة التي يطلبها العميل ، ومن أمثلة ذلك ما يلي :

- عندما يمر منتج معين داخل المصنع بعدة مراحل إنتاجية متتالية .
- الإجراءات المتتالية التي ينهيها العميل عند استخراج أو تجديد رخصة السيارة في إدارة المرور .

ويعبر عن هذا النظام بيانياً في الشكل (٦ - ٤)



شكل (٦ - ٤)

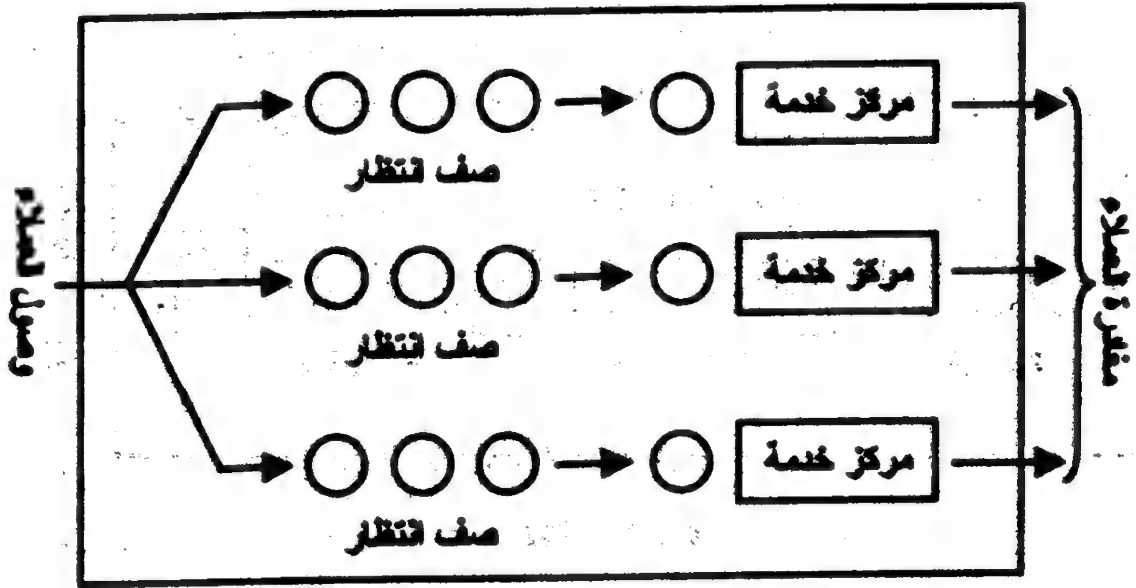
د - نظام عدة صفوف انتظار وعدة مراكز خدمة على التوازي

وفقاً لهذا النظام يوجد عدة مراكز خدمة تقدم نفس الخدمة لعدد من العملاء في نفس الوقت ويسمح بوجود صف انتظار أمام كل مركز خدمة ومن أمثلة ذلك ما يلي :

- محطة البنزين التي بها عدة طلمبات وتقف السيارات في صفوف وكل صف يقف أمام طلمبة بنزين .
- مكتب البريد الذي يوجد به عدة شبابيك لبيع الطوابع وتسجيل الخطابات ويقف العملاء في صفوف بحيث أن كل صف يقف أمام شباك .

ويعبر عن هذا النظام بيانياً في الشكل (٦ - ٥)





شكل (٦ - ٥)

## Service Discipline

## ٤ - نظام تقديم الخدمة

يقصد بنظام تقديم الخدمة مجموعة القواعد التي تحدد أولوية العملاء في الحصول على الخدمة ، ويوجد عدة نماذج لنظام تقديم الخدمة منها ما يلي :

### أ - من يأتي أولاً يُخدم أولاً First come, first served (FIFO)

وفقاً لهذا النظام تتم خدمة العملاء حسب ترتيب الوصول إلى الصف ، ومن أمثلة ذلك ما يلي :

- ما يحدث في صالات السفر وصالات الوصول أمام شبكات الجوازات وفي أماكن تفتيش الحقائب .
- عند خدمة السيارات في محطات البنزين .
- ما يحدث أمام شبكات قطع التذاكر في محطة القطارات .

ويعد هذا النظام هو الأكثر شيوعاً في معظم مجالات الخدمة التي تتكون فيها صفوف الانتظار ، ويفترض ضمناً أن هذه القاعدة هي التي تسري ما لم ينص صراحة على سواها .

ب - من يأتي أخيراً يُخدم أولاً Last come, first served (LIFO)  
وفقاً لهذا النظام فإن العميل الذي يصل أخيراً يُخدم أولاً ، ومن أمثلة ذلك ما يلي :

- ما يحدث للركاب داخل المصعد الكهربائي .
- عند إصلاح قطارات السكك الحديدية أو عربات المترو داخل ورش الصيانة والإصلاح .

ج - تعطي الأولوية Priority لخدمة العميل حسب معيار معين بغض النظر عن موعد الوصول للصف  
ومن هذه المعايير ما يلي :

- أهمية العميل : فقد يفضل مثلاً البدء بإصلاح الآلة التي تمثل نقطة اختناق في عملية الإنتاج ويترتب على عطلها خسارة كبيرة عن غيرها من الآلات العاطلة .
- البعد الاجتماعي : فقد تعطي أولوية للأطفال أو الشيوخ أو النساء عند تقديم خدمة معينة أو قد تعطي أولوية عند استقبال الحالات الحرجة في المستشفيات عن المرضى العاديين .
- زمن أداء الخدمة : قد يفضل البدء بإصلاح الآلات التي يستغرق إصلاحها زمناً أقل من غيرها من الآلات خصوصاً عن تساوي تكلفة العطل .

- العشوائية : حيث يتم اختيار العميل الذي تقدم إليه الخدمة بشكل عشوائي دون التقيد بأي ترتيب مسبق ، وهذا النظام نادر الحدوث نظراً لما يسببه من تدمير وضجر لباقي العملاء في الصف قد يدفع البعض منهم إلى مغادرة الصف قبل الحصول على الخدمة وبذلك تخسر المنظمة أو المنشأة .

#### ٥ - مجتمع العملاء طالب الخدمة ( أي طاقة النظام )

#### Calling Source or Population

- يقصد بحجم مجتمع العملاء طالبي الخدمة أكبر عدد من العملاء يمكن أن يتواجدوا في النظام سواء أكانوا في موقع مركز الخدمة أو في صف الانتظار .

ويوجد نوعان من مجتمع العملاء هما :

#### أ - المجتمع اللانهائي أو غير المحدود

- ويحدث ذلك إذا كان عدد العملاء كبيراً جداً والنظام له طاقة غير محدودة وبالتالي ليس له حدود لعدد العملاء المسموح بهم داخل نظام الخدمة كما هو الحال بالنسبة لعدد السيارات التي ترد إلى محطة البنزين للغسيل أو الترميم .

#### ب - المجتمع النهائي أو المحدود

- إذا كان عدد العملاء صغيراً والنظام له طاقة محدودة ولا يسمح بالتالي إلا بعدد محدود داخل نظام الخدمة ، كما في حالة عدد المرضى المتواجدين داخل عيادة أحد الأطباء .

ونظراً لأن العمليات الحسابية تكون أكثر سهولة في حالة المجتمعات اللانهائية ، لذلك سوف يؤخذ بهذا الافتراض عند تحليل نماذج صفوف الانتظار حتى عندما يكون مجتمع العملاء كبيراً نسبياً ولكنه محدود . وسوف يفترض ضمناً أن مجتمع العملاء طالبي الخدمة مجتمع لا نهائي ، إلا إذا نص صراحة على أنه مجتمع نهائي .

### (٦-٢) بعض نماذج صفوف الانتظار

نفترض معظم نماذج صفوف الانتظار أن وصول ومغادرة العملاء لصف الانتظار تحدث طبقاً لعمليات الميلاد والوفاة لتوزيع بواسون ، ويقصد بعملية الميلاد وصول أحد العملاء إلى مكان الخدمة وتحدث حالة الوفاة عندما يخرج أحد العملاء من مكان الخدمة .

ودراسة مشكلة صفوف الانتظار باستخدام بعض الصيغ الرياضية والاحتمالية يمكن منشآت الأعمال أو المنظمات بشكل عام من التعرف على المؤشرات والمقاييس التالية :

- ١ - احتمال أن يكون مركز الخدمة عاطلاً ( أي لا يوجد صف انتظار ) .
- ٢ - احتمال وجود عدد معين من العملاء في النظام .
- ٣ - احتمال أن يكون مركز الخدمة مشغولاً ويضطر العميل للانتظار .
- ٤ - متوسط عدد العملاء المنتظرين في النظام .
- ٥ - متوسط عدد العملاء المنتظرين في صف الانتظار .
- ٦ - متوسط الوقت الذي يقضيه العميل في النظام .
- ٧ - متوسط الوقت الذي يقضيه العميل في صف الانتظار قبل أن تقدم له الخدمة .

هذه المؤشرات والمقاييس بالإضافة إلى تكلفة الخدمة وتكلفة الانتظار تساعد الإدارة على فهم خصائص تشغيل نظام صفوف الانتظار وهذا بدوره يمكن الإدارة من معرفة ما إذا كان مستوى الخدمة في النظام يسير حسب المستوى المرغوب فيه ويحقق التوازن بين تكلفة أداء الخدمة وتكلفة انتظار الحصول على الخدمة ، أم أن الأمر يحتاج إلى التدخل من أجل تحسين مستوى الخدمة .

ومما لا شك فيه أن خصائص تشغيل نظام صفوف الانتظار تتأثر بطول مدة تشغيل هذا النظام ، والتعرف على خصائص تشغيل النظام خلال الزمن يُعد أمراً غاية في الصعوبة . ومن حسن الطالع أنه كلما زادت مدة تشغيل النظام فإن خصائص تشغيله تميل إلى الاستقرار ، لذلك سوف يفترض أن نظام صفوف الانتظار يعمل منذ مدة طويلة تكفي لإلغاء أثر الزمن على خصائص تشغيل النظام ، ويقال في هذه الحالة أن النظام في حالة استقرار Steady Stage .

وسوف نكتفي هنا بدراسة نموذجين من نماذج صفوف الانتظار ، النموذج الأول هو صف انتظار واحد ومركز خدمة واحد ، والنموذج الثاني هو صف انتظار واحد وعدة مراكز خدمة .

#### (١-٢-٦) صف انتظار واحد ومركز خدمة واحد (M/M/1)

في هذا النموذج يوجد صف انتظار واحد به العديد من العملاء يظنون الخدمة من مركز خدمة واحد { شكل (٦ - ١) } ، وجرت العادة على أن هذا النموذج يرمز له بالمصطلح M/M/1 ، حيث :

M تشير إلى معدل الوصول الذي يتبع توزيع بواسون

$M$  تشير إلى معدل الخدمة الذي يتبع التوزيع الأسى

$1$  يشير إلى مركز خدمة واحد .

ويبنى هذا النموذج على مجموعة الفروض التالية :

- ١ - صف انتظار واحد .
- ٢ - مركز خدمة واحد .
- ٣ - طاقة النظام غير محددة .
- ٤ - نظام خدمة العميل : من يأتي أولاً يُخدم أولاً FIFO .
- ٥ - وصول العملاء هو متغير عشوائي يتبع توزيع بواسون بمتوسط معدل وصول  $\lambda$  لكل وحدة زمنية .
- ٦ - زمن الخدمة هو متغير عشوائي يتبع التوزيع الأسى بمتوسط معدل خدمة  $\mu$  لكل وحدة زمنية .
- ٧ - معدل وصول العملاء أقل من معدل أداء الخدمة لهم ، أي أن  $\lambda < \mu$  .
- ٨ - عدم تدمير العملاء بسبب طول صف الانتظار وعدم مغادرة العميل للصف متى تم دخوله وأن يكون وصول العملاء منفردين .

ويوجد مجموعة من المؤشرات والمقاييس تم اشتقاقها وتطبيقها على هذا النموذج ، وتجدر الإشارة إلى أن التركيز هنا لن يكون منصبا على التحليل الرياضي لكيفية اشتقاق هذه المؤشرات والمقاييس ، وإنما سيكون التركيز هو على كيفية استخدام هذه المؤشرات والمقاييس في فهم خصائص النظام وتحسين مستوى الخدمة فيه ، هذه المؤشرات والمقاييس نعرضها فيما يلي :

- ١ - احتمال أن يكون مركز الخدمة مشغولا بأداء الخدمة للعميل ، والذي يعني في نفس الوقت احتمال أن يضطر العميل للانتظار في الصف هو :

$$\frac{\lambda}{\mu}$$

والقيمة  $\frac{\lambda}{\mu}$  تعبر عن القيمة المتوقعة لعدد مرات وصول العملاء إلى مركز الخدمة لكل وحدة زمنية ، وتعرف هذه العلاقة بمعامل الاستخدام أو كثافة الحركة ، أي أن :

$$\frac{\lambda}{\mu} = \text{معامل الاستخدام (كثافة الحركة)}$$

فإذا كان معدل الوصول ،  $\lambda$  ، أكبر من معدل الخدمة ،  $\mu$  ، فإن :

$$\frac{\lambda}{\mu} > 1$$

وهذا يعني أن الطول المتوقع لصف الانتظار سوف يزيد بلا حدود ، ومن ثم لا تحدث حالة سكون أو استقرار للنظام .

وإذا كان معدل الوصول ،  $\lambda$  ، مساوياً لمعدل الخدمة ،  $\mu$  ، فإن :

$$\frac{\lambda}{\mu} = 1$$

وهذا يعني أن الطول المتوقع لصف الانتظار سوف يزيد أيضاً بلا حدود ، ومن ثم لن يكون النظام في حالة سكون أو استقرار .

أما إذا كان معدل الوصول ،  $\lambda$  ، أقل من معدل الخدمة ،  $\mu$  ، فإن :

$$\frac{\lambda}{\mu} < 1$$

فهذا يعني أن طول صف الانتظار المتوقع سوف يتناقص إلى أن ينتهي ويكون النظام بالتالي في حالة سكون أو استقرار .

٢ - احتمال أن يكون النظام غير مشغول بعملاء ( أي عاطلا ) هو :

$$P(x = 0) = P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$$

حيث  $x$  متغير عشوائي يشير إلى عدد العملاء الموجودين في النظام .

٣ - احتمال وجود  $n$  من العملاء في النظام هو :

$$P(x = n) = P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)$$

ومن ثم فإن :

احتمال وجود عميل واحد في النظام هو :

$$P(x = 1) = P_1 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)$$

احتمال وجود اثنين من العملاء في النظام هو :

$$P(x = 2) = P_2 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)$$

وهكذا .

٤ - احتمال أن يكون عدد العملاء في صف الانتظار أكبر من أو يساوي  $n$

هو :

$$P(x \geq n) = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)$$



٥ - متوسط عدد العملاء في النظام :

سوف يرمز لهذا المتوسط بالرمز  $L_s$  ، حيث :

$$L_s = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

٦ - متوسط عدد العملاء في صف الانتظار :

سوف يرمز لهذا المتوسط بالرمز  $L_q$  ، حيث :

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}$$

وكما هو واضح فإنه يوجد فرق بين عدد العملاء في النظام وعدد العملاء في الصف ، فعدد العملاء في النظام يساوي عدد العملاء الواقفين في الصف بالإضافة إلى عدد العملاء الذين تقدم لهم الخدمة .

٧ - متوسط الزمن الذي يقضيه العميل في النظام :

سوف يرمز لهذا المتوسط بالرمز  $W_s$  ، حيث :

$$W_s = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

٨ - متوسط الزمن الذي يقضيه العميل في الصف ( أي قبل بدء الخدمة ) :

سوف يرمز لهذا المتوسط بالرمز  $W_q$  ، حيث :

$$W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}$$

ويمكن ببساطة إثبات أن :

$$W_q = W_s - \frac{1}{\mu}$$

٩ - احتمال أن يقضي العميل أكثر من  $t$  وحدة زمنية في النظام :

سوف يرمز لهذا الاحتمال بالرمز  $P_s$  ، حيث :

$$P_s(> t) = e^{-t/W_s}, \quad t \geq 0$$

١٠ - احتمال أن يقضي العميل أكثر من  $t$  وحدة زمنية في الصف :

سوف يرمز لهذا الاحتمال بالرمز  $P_q$  ، حيث :

$$P_q(> t) = \frac{\lambda}{\mu} e^{-t/W_s}, \quad t > 0$$

مثال (١) :

محطة بنزين بها مضخة واحدة ، وتصل السيارات إلى المحطة وفق توزيع بواسون بمعدل 12 سيارة كل ساعة . فإذا كان زمن خدمة السيارات بالمحطة يتبع التوزيع الأسى بمتوسط 4 دقائق لكل سيارة .

المطلوب حساب ما يلي :

- ١ - احتمال أن تكون المحطة مشغولة بخدمة سيارة واحدة .
- ٢ - احتمال أن تكون المحطة خالية بدون استخدام .
- ٣ - متوسط عدد السيارات في المحطة .
- ٤ - متوسط عدد السيارات في صف الانتظار .
- ٥ - متوسط الزمن الذي تقضيه السيارة في المحطة .

- ٦ - متوسط الزمن الذي تقضيه السيارة في صف الانتظار .
- ٧ - احتمال أن تقضي السيارة في المحطة أكثر من 40 دقيقة .
- ٨ - احتمال أن تقضي السيارة في صف الانتظار أكثر من 20 دقيقة .
- ٩ - احتمال أن يكون بالمحطة  $n$  سيارة تنتظر الخدمة ، ومنها لوجد احتمال أن يكون في المحطة 3 سيارات على الأكثر .

الحل :

معدل الوصول ،  $\lambda$  ، هو :

$$\lambda = 12 \text{ (سيارة / ساعة)}$$

معدل الخدمة ،  $\mu$  ، هو :

$$\mu = \frac{60}{4} = 15 \text{ (سيارة / ساعة)}$$

- ١ - احتمال أن تكون المحطة مشغولة بخدمة سيارة واحدة هو :

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{12}{15} = 0.8$$

هذه النتيجة تعني أن محطة البنزين سوف تكون مشغولة 80% من الوقت

- ٢ - احتمال أن تكون المحطة خالية بدون استخدام هو :

$$P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu} = 1 - 0.8 = 0.2$$

- ٣ - متوسط عدد السيارات في المحطة ( أي في النظام ) هو :

$$L_s = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{12}{15 - 12} = 4 \text{ (سيارات)}$$

٤ - متوسط عدد السيارات في صف الانتظار هو :

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{144}{15(15 - 12)} = 3.2 \text{ (سيارات)}$$

٥ - متوسط الزمن الذي تقضيه السيارة في المحطة هو :

$$W_s = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{15 - 12} = \frac{1}{3} \text{ (ساعة)}$$

$$= \frac{1}{3} \times 60 = 20 \text{ (دقيقة)}$$

٦ - متوسط الزمن الذي تقضيه السيارة في صف الانتظار (قبل الدخول للخدمة) هو :

$$W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{12}{15(15 - 12)} = \frac{4}{15} \text{ (ساعة)}$$

$$= \frac{4}{15} \times 60 = 16 \text{ (دقيقة)}$$

٧ - لإيجاد احتمال أن تقضي السيارة في المحطة أكثر من 40 دقيقة ، نفرض أن الزمن الذي تقضيه السيارة في المحطة هو المتغير العشوائي T ، حيث :

$$P_s(T > t) = e^{-t/W_s}$$

إذن :

احتمال أن تقضي السيارة في المحطة أكثر من 40 دقيقة هو :

$$P_s(T > 40) = e^{-40/20} = e^{-2} = 0.135$$

ومعنى هذا أنه يوجد احتمال قدره 13.5% أن تنتظر السيارة في المحطة لأكثر من 40 دقيقة .

٨ - احتمال أن تنتظر السيارة في صف الانتظار أكثر من 20 دقيقة هو :

$$\begin{aligned} P_q(T > 20) &= \frac{\lambda}{\mu} e^{-\rho / w_s} \\ &= \frac{12}{15} e^{-20 / 20} = \frac{4}{5} e^{-1} = \frac{4}{5} \left( \frac{1}{2.718} \right) \\ &= 0.294 \end{aligned}$$

٩ - لإيجاد احتمال أن يكون بالمحطة n سيارة ، نفرض أن عدد السيارات الموجودين بالمحطة هو المتغير العشوائي x ، إذن :

احتمال أن يكون بالمحطة n سيارة هو :

$$\begin{aligned} P(x = n) = P_n &= \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^n \left( 1 - \frac{\lambda}{\mu} \right) \\ &= \left( \frac{12}{15} \right)^n (0.2) = \left( \frac{4}{5} \right)^n (0.2) \end{aligned}$$

احتمال وجود 3 سيارات على الأكثر بالمحطة هو :

$$\begin{aligned} P(x \leq 3) &= P(x = 0) + P(x = 1) + P(x = 2) + P(x = 3) \\ &= P_0 + P_1 + P_2 + P_3 \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{4}{5}\right)^0 (0.2) + \left(\frac{4}{5}\right)(0.2) + \left(\frac{4}{5}\right)^2 (0.2) + \left(\frac{4}{5}\right)^3 (0.2)$$

$$= 0.2 + 0.16 + 0.128 + 0.1024 = 0.5904$$

مثال (٢) :

لاحظ مدير أحد محلات بيع الأحذية أن العملاء يصلون المحل وفق توزيع بواسون بمعدل 18 عميلاً في الساعة ، كما لاحظ أن معدل خدمة العميل يتبع التوزيع الأسى بمعدل 20 عميلاً في الساعة .

المطلوب إيجاد ما يلي :

- ١ - احتمال أن يكون المحل خالياً من العملاء .
- ٢ - احتمال وجود 4 عملاء بالمحل .
- ٣ - متوسط عدد العملاء في المحل ( أي في النظام ) .
- ٤ - متوسط عدد العملاء في صف الانتظار .
- ٥ - متوسط الوقت الذي يقضيه العميل في المحل .
- ٦ - متوسط الوقت الذي يقضيه العميل في صف الانتظار .
- ٧ - إذا ارتفع معدل وصول العملاء إلى المحل وأصبح 30 عميلاً في الساعة ، هل يمكن الإجابة على التساؤلات السابقة ؟ ولماذا ؟
- ٨ - إذا قررت إدارة المحل تحسين نوعية الخدمة بحيث يصبح معدل الخدمة 24 عميلاً في الساعة وذلك مقابل تكلفة رأسمالية متمثلة في زيادة عدد العاملين بالمحل ، المطلوب معرفة تأثير هذا القرار على مؤشرات صف الانتظار المبينة في كل من المطلوب (٣) ، (٤) ، (٥) ، (٦) .

الحل :

معدل الوصول ،  $\lambda$  ، هو :

$$\lambda = 18 \text{ ( عميل / ساعة )}$$

معدل الخدمة ،  $\mu$  ، هو :

$$\mu = 20 \text{ ( عميل / ساعة )}$$

١ - احتمال أن يكون المحل خالياً من أي عميل هو :

$$P(x = 0) = P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu} = 1 - \frac{18}{20} = 0.10$$

٢ - احتمال وجود 4 عملاء بالمحل هو :

$$P(x = 4) = P_4 = \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^4 \left( 1 - \frac{\lambda}{\mu} \right)$$

$$= \left( \frac{18}{20} \right)^4 (0.10) = 0.0656$$

هذه النتيجة تعني أن هناك احتمالاً قدره 6.56% لأن يكون بالمحل أربعة عملاء .

٣ - متوسط عدد العملاء في المحل ( أي في النظام ) هو :

$$L_s = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{18}{20 - 18} = 9 \text{ ( عملاء )}$$

وهذا يعني أنه يتوقع وجود 9 عملاء في المحل أحدهم يتلقى الخدمة ويقف 8 عملاء في الصف منتظرين دورهم في أداء الخدمة .

٤ - متوسط عدد العملاء في صف الانتظار

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{(18)^2}{20(20 - 18)} = 8.1 \text{ (عملاء)}$$

وهذه النتيجة تتفق مع ما تم التوصل إليه في المطلوب (3) .

٥ - متوسط الوقت الذي يقضيه العميل في المحل هو :

$$W_s = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{20 - 18} = \frac{1}{2} \text{ (ساعة)}$$

$$= \frac{1}{2} \times 60 = 30 \text{ (دقيقة)}$$

٦ - متوسط الوقت الذي يقضيه العميل في صف الانتظار هو :

$$W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{18}{20(20 - 18)} = \frac{9}{20} \text{ (ساعة)}$$

$$= \frac{9}{20} \times 60 = 27 \text{ (دقيقة)}$$

٧ - إذا كان معدل وصول العملاء إلى المحل هو 30 عميلاً في الساعة ،

أي أن  $\lambda = 30$  ، بينما  $\mu = 20$  ، فهذا يعني أن معدل وصول العملاء ،

$\lambda$  ، أصبح أكبر من معدل خدمة العملاء ،  $\mu$  ، والذي يعني أن :

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{30}{20} = 1.5 > 1$$

ويعني ذلك أن نظام الخدمة بالمحل أصبح غير ساكن أو مستقر لأن طول صف

الانتظار سوف يزداد بلا حدود ، ومن ثم لا يمكن حساب أي من المتوسطات

التي تم إيجادها في كل من المطلوب (٣) ، (٤) ، (٥) ، (٦) .



٨ - إذا أصبح معدل الخدمة هو :

$$\mu = 24 \text{ (عميل / ساعة)}$$

بينما يظل معدل وصول العملاء ،  $\lambda$  ، كما هو ، حيث :

$$\lambda = 18 \text{ (عميل / ساعة)}$$

فإن :

متوسط عدد العملاء في المحل هو :

$$L_s = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{18}{24 - 18} = 3 \text{ (عملاء)}$$

متوسط عدد العملاء في صف الانتظار هو :

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{(18)^2}{24(24 - 18)} = 2.25 \text{ (عميل)}$$

متوسط الوقت الذي يقضيه العميل في المحل هو :

$$W_s = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{24 - 18} = \frac{1}{6} \text{ (ساعة)}$$

$$= \frac{1}{6} \times 60 = 10 \text{ (دقائق)}$$

متوسط الوقت الذي يقضيه العميل في صف الانتظار هو :

$$W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{18}{24(24 - 18)} = \frac{1}{8} \text{ (ساعة)}$$

$$= \frac{1}{8} \times 60 = 7.5 \text{ (دقائق)}$$

ويمكن عرض النتائج المتحصل عليها في جدول (٦ - ١) عندما يكون معدل الخدمة هو 20 عميلاً في الساعة وبعد أن يتم تحسين مستوى الخدمة لتصبح 24 عميلاً في الساعة كما يلي :

جدول (٦ - ١)

خصائص صف الانتظار	معدل الخدمة	
	$\mu = 20$ (عميل / ساعة)	$\mu = 24$ (عميل / ساعة)
$L_q$ : متوسط عدد العملاء في النظام	9 (عملاء)	3 (عملاء)
$L_q$ : متوسط عدد العملاء في الصف	8.1 (عملاء)	2.25 (عميل)
$W_q$ : متوسط الوقت الذي يقضيه العميل في النظام	30 (دقيقة)	10 (دقائق)
$W_q$ : متوسط الوقت الذي يقضيه العميل في الصف	27 (دقيقة)	7.5 (دقائق)

وكما هو واضح من مقارنة النتائج فقد حدث تحسن ملموس في مستوى الخدمة انعكس في انخفاض متوسط عدد العملاء سواء في المحل أو في صف الانتظار وكذلك في انخفاض متوسط الوقت الذي يقضيه العميل سواء في المحل أو في صف الانتظار ، إلا أن ذلك مرتبط بالنكفة الاقتصادية لكل من زيادة كفاءة مقدمي خدمة أو زيادة عدد مراكز الخدمة واختيار البديل المناسب ، كما سنرى فيما بعد .

#### (٦-٣-٢) صف انتظار واحد وعدة مراكز خدمة على التوازي (M/M/K)

في هذا النموذج يوجد صف انتظار واحد وعدة مراكز خدمة نفرض أن عددها  $k$  كما يتضح من الشكل (٦ - ٢) ، لذلك يرمز لهذا النموذج بالمصطلح M/M/K ، ووفق هذا النظام فإن كل مركز من مراكز الخدمة الموجودة على

التوازي يقدم نفس نوعية الخدمة للعميل ، لذلك عندما يدخل العميل للنظام يتجه مباشرة إلى مركز الخدمة الخالي ، ومن ثم لن يتكون صف انتظار إلا إذا كان عدد العملاء في النظام أكبر من عدد مراكز الخدمة ،  $k$  .

وكما رأينا في البند السابق ان نموذج صف انتظار واحد ومركز خدمة واحد يكون في حالة سكون أو استقرار إذا كان معدل وصول العملاء ،  $\lambda$  ، أقل من معدل أداء الخدمة ،  $\mu$  . أما في هذا النموذج فإنه يكون في حالة سكون أو استقرار إذا كان معدل وصول العملاء ،  $\lambda$  ، أقل من حاصل ضرب معدل أداء الخدمة ،  $\mu$  ، في عدد مراكز الخدمة ،  $k$  ، أي إذا تحققت العلاقة التالية .

$$\lambda < k \mu$$

حيث يشير حاصل الضرب  $k \mu$  إلى أقصى معدل خدمة يمكن تقديمه للعملاء في جميع مراكز الخدمة .

وعن الفروض التي يبنى عليها هذا النموذج فإنها لا تختلف كثيراً عن الفروض التي يبنى عليها النموذج السابق إلا في بعض الفروض المميزة لهذا النموذج ، هذه الفروض يمكن إجمالها فيما يلي .

- ١ - صف انتظار واحد .
- ٢ - عدد مراكز الخدمة  $k$  .
- ٣ - طاقة النظام غير محدودة .
- ٤ - نظام خدمة العميل . من يحضر أولاً يخدم أولاً FIFO .
- ٥ - وصول العملاء هو متغير عشوائي يتبع توزيع بواسون بمتوسط معدل وصول  $\lambda$  لكل وحدة زمنية .

- ٦ - زمن خدمة العميل هو متغير عشوائي يتبع التوزيع الأسى بمتوسط معدل خدمة  $\mu$  لكل وحدة زمنية .
- ٧ - معدل وصول العملاء أقل من حاصل ضرب عدد مراكز الخدمة في معدل خدمة العميل ، أي أن :

$$\lambda < k \mu$$

- ٨ - عدم تضرر العملاء بسبب طول صف الانتظار وعدم مغادرة العميل للصف متى تم دخوله وأن يكون وصول العملاء منفردين .

وبالطريقة نفسها سوف نعرض لأهم المؤشرات والمقاييس التي تساعد في فهم خصائص النظام دونما التركيز على التحليل الرياضي لكيفية اشتقاق هذه المؤشرات والمقاييس ، ومن هذه المؤشرات والمقاييس ما يلي :

- ١ - احتمال أن يكون النظام غير مشغول بعملاء ( أي عاطلا ) هو :

$$P(x = 0) = P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{k-1} \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \frac{1}{k!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \left(\frac{k\mu}{k\mu - \lambda}\right)}$$

وتوجد جداول خاصة لحساب قيمة الاحتمال  $P_0$  عندما يكون هناك عدد  $k$  من مراكز الخدمة ، حيث  $k > 1$  ، وتكون هي القيمة التي تقع عند ملتقى السطر  $k$   $\mu$  والعمود  $k$  ( جدول رقم 2 بالملحق ) .

- ٢ - احتمال أن يكون النظام مشغولا ويضطر العميل للانتظار في الصف هو :

$$P(x \geq k) = \frac{\mu \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}{(k-1)! (k\mu - \lambda)} P_0$$

٣ - متوسط عدد العملاء في النظام هو :

$$L_s = \frac{\lambda \mu \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^k}{(k-1)! (k\mu - \lambda)^2} P_0 + \frac{\lambda}{\mu}$$

٤ - متوسط عدد العملاء في صف الانتظار هو :

$$L_q = \frac{\lambda \mu \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^k}{(k-1)! (k\mu - \lambda)^2} P_0$$

$$= L_s - \frac{\lambda}{\mu}$$

٥ - متوسط وقت انتظار العميل في النظام هو :

$$W_s = \frac{\mu \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^k}{(k-1)! (k\mu - \lambda)^2} P_0 + \frac{1}{\mu}$$

٦ - متوسط وقت انتظار العميل في صف الانتظار هو :

$$W_q = \frac{\mu \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^k}{(k-1)! (k\mu - \lambda)^2} P_0$$

$$= W_s - \frac{1}{\mu}$$

مثال (٣) :

مأمورية الضرائب لديها أربعة مكاتب لاستقبال العملاء من الممولين لفحص إقراراتهم الضريبية وتحديد قيمة الضرائب المستحقة ، فإذا كان الممولون يصلون إلى المأمورية بمعدل 60 ممولا على مدى 6 ساعات ( يوم العمل ) ، وقد تبين أن الزمن الذي تستغرقه خدمة العميل يتبع توزيع اسي بمتوسط 20 دقيقة للعميل الواحد .

المطلوب إيجاد ما يلي :

- ١ - احتمال أن تكون المأمورية خالية بدون خدمة .
- ٢ - احتمال أن تكون كل المكاتب بالمأمورية مشغولة ويصطر الممول أن ينتظر في صف انتظار .
- ٣ - متوسط عدد الممولين في المأمورية ( أي في النظام ) .
- ٤ - متوسط عدد الممولين المنتظرين للخدمة في صف الانتظار .
- ٥ - متوسط الوقت الذي يستغرقه الممول في المأمورية لأداء خدمته .
- ٦ - متوسط الوقت الذي يستغرقه الممول في صف الانتظار .
- ٧ - الوقت الإجمالي الذي يقضيه مأمور الضرائب في خدمة الممولين في الأسبوع ( أي متوسط عدد الساعات التي يكون فيها مأمور الضرائب بالمأمورية مشغولا في الأسبوع ) .

الحل :

لدينا البيانات التالية .

$$k = 4$$

عدد مراكز الخدمة هو  $k$  ، حيث :

معدل وصول الممولين في الساعة هو  $\lambda$  ، حيث :

$$\lambda = \frac{60}{6} = 10 \text{ ( عميل / ساعة )}$$

معدل خدمة الممول في الساعة هو  $\mu$  ، حيث :

$$\mu = \frac{60}{20} = 3 \text{ ( عميل / ساعة )}$$

١ - احتمال أن تكون المأمورية خالية من الممولين ( أي يكون النظام عاطلاً بدون خدمة ) هو :

$$\begin{aligned} P_0 &= \frac{1}{\left( \sum_{n=0}^{k-1} \frac{1}{n!} \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^n \right) + \left( \frac{1}{k!} \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^k \frac{k\mu}{k\mu - \lambda} \right)} \\ &= \frac{1}{\left( 1 + \frac{1}{1!} \left( \frac{10}{3} \right) + \frac{1}{2!} \left( \frac{10}{3} \right)^2 + \frac{1}{3!} \left( \frac{10}{3} \right)^3 \right) + \left( \frac{1}{4!} \left( \frac{10}{3} \right)^4 \left( \frac{12}{2} \right) \right)} \\ &= \frac{1}{\left( 1 + \frac{10}{3} + \frac{100}{18} + \frac{1000}{162} \right) + \left( \frac{10000}{1944} (6) \right)} \\ &= \frac{1}{46.91} = 0.0213 \end{aligned}$$

أي أن هناك احتمالاً قدره 2.13% لأن تكون المأمورية خالية من الممولين .

ملحوظة :

يمكن إيجاد قيمة الاحتمال  $P_0$  مباشرة من جدول رقم (2) بالملحق

كما يلي :

$$\text{حيث أن : } k = 4 \text{ ، } \frac{\lambda}{k\mu} = \frac{10}{4 \times 3} = 0.83$$

فتكون قيمة  $P_0$  هي القيمة الواقعة عند ملتقى السطر  $\frac{\lambda}{k\mu} = 0.83$

والعمود  $k = 4$  وهي تساوي 0.0219 . والفرق بين القيمتين راجعاً بالطبع إلى عمليات التقريب .

٢ - بفرض أن عدد الممولين الموجودين بالمأمورية هو  $x$  ، فإن :

احتمال أن تكون كل المكاتب بالمأمورية مشغولة ويضطر العميل للانتظار في الصف هو :

$$\begin{aligned} P(x \geq k) &= \frac{\mu \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^k}{(k-1)! (k\mu - \lambda)} P_0 \\ &= \frac{3 \left( \frac{10}{3} \right)^4}{3! (12 - 10)} \times 0.0213 = 0.6574 \end{aligned}$$

٣ - متوسط عدد الممولين الموجودين في المأمورية ( أي في النظام ) هو :



$$L_s = \left( \frac{\lambda \mu \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^k}{(k-1)! (k\mu - \lambda)^2} \right) P_0 + \frac{\lambda}{\mu}$$

$$= \left( \frac{10 \times 3 \times \left( \frac{10}{3} \right)^4}{3! (12 - 10)^2} \right) (0.0213) + \frac{10}{3}$$

$$= 3.28 + 3.33 = 6.61 \text{ (ممولين)}$$

٤ - متوسط عدد الممولين الموجودين في صف الانتظار هو :

$$L_q = \left( \frac{\lambda \mu \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^k}{(k-1)! (k\mu - \lambda)^2} \right) P_0 = 3.28 \text{ (ممولين)}$$

ويمكن حساب القيمة  $L_q$  كما يلي :

$$L_q = L_s - \frac{\lambda}{\mu} = 6.61 - \frac{10}{3} = 3.28 \text{ (ممولين)}$$

٥ - متوسط الوقت الذي يقضيه الممول في المأمورية ( أي في النظام ) لأداء خدمته هو :

$$W_s = \left( \frac{\mu \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^k}{(k-1)! (k\mu - \lambda)^2} \right) P_0 + \frac{1}{\mu}$$

$$= \left( \frac{3 \binom{10}{3}}{3! (12 - 10)^2} \right) (0.0213) + \frac{1}{3}$$

$$= 0.661 \text{ (ساعة)}$$

$$= 39.66 \approx 40 \text{ (دقيقة)}$$

٦ - متوسط الوقت الذي يقضيه الممول في الصف انتظاراً لأداء الخدمة هو :

$$W_q = W_s - \frac{1}{\mu} = 0.661 - 0.333 = 0.328 \text{ (ساعة)}$$

$$= 19.68 \approx 20 \text{ (دقيقة)}$$

٧ - لإيجاد الوقت الإجمالي الذي يقضيه مأمور الضرائب في خدمة العملاء

( أي متوسط عدد الساعات التي يكون فيها مأمور الضرائب بالمأمورية

مشغولاً في الأسبوع ) فإن :

معامل الاستخدام هو :

$$\frac{\lambda}{k\mu} = \frac{10}{4 \times 3} = 0.833$$

متوسط عدد الساعات التي يقضيها مأمور الضرائب في خدمة الممولين في اليوم ( 6 ساعات عمل ) هو :

$$6 \times 0.833 = 4.998 \text{ (ساعات)}$$

متوسط عدد الساعات التي يقضيها مأمور الضرائب في خدمة الممولين في الأسبوع ( 6 أيام عمل ) هو :

$$6 \times 4.998 = 29.988 \approx 30 \text{ (ساعة)}$$

مثال (٤) :

إذا كان معدل وصول الطلاب إلى مكتبة الكلية لاستعارة الكتب يتم وفق توزيع بواسون بمعدل طالب كل 6 دقائق وخصصت المكتبة اثنتين من موظفيها لخدمة الطلاب فيما يتعلق بعمليات الاستعارة ، وكان زمن الخدمة يتبع التوزيع الأسى بمتوسط 10 دقائق لكل طالب . فإذا توقع مدير المكتبة أن عدد الطلاب المترددين على المكتبة لاستعارة الكتب سوف يزداد في الفترات المقبلة ، وفي المقابل قرر زيادة عدد الموظفين المخصصين لخدمة الطلاب في عمليات الاستعارة .

المطلوب :

إيجاد عدد الموظفين الإضافيين الذين يتم تخصيصهم لهذا الغرض إذا كان معدل وصول الطلاب إلى المكتبة سوف يتضاعف ، وفي نفس الوقت ترغب الإدارة في تخفيض زمن انتظار الطالب بالمكتبة إلى النصف .

الحل :

معدل وصول الطلاب إلى المكتبة هو  $\lambda$  ، حيث :

$$\lambda = \frac{1}{6} \text{ (طالب / دقيقة)}$$

$$= \frac{1}{6} \times 60 = 10 \text{ (طلاب / ساعة)}$$

معدل خدمة الطالب بالمكتبة هو  $\mu$  ، حيث :

$$\mu = \frac{1}{10} \text{ (طالب / دقيقة)}$$

$$= \frac{1}{10} \times 60 = 6 \text{ (طلاب / ساعة)}$$

عدد موظفي الاستعارة = عدد مراكز الخدمة هو :

$$K = 2$$

نحسب أولاً احتمال أن تكون المكتبة خالية من الطلاب وهو  $P_0$  ،

حيث :

$$\begin{aligned} P_0 &= \frac{1}{\sum_{n=0}^{k-1} \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \frac{1}{k!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \left(\frac{k\mu}{k\mu - \lambda}\right)} \\ &= \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{1!} \left(\frac{10}{6}\right) + \frac{1}{2!} \left(\frac{10}{6}\right)^2 \left(\frac{2 \times 6}{2 \times 6 - 10}\right)\right)} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\left(1 + \frac{5}{3}\right) + \frac{25}{3}} = \frac{1}{\frac{33}{3}} = \frac{1}{11} = 0.091$$

متوسط وقت الانتظار للطالب في الصف هو :

$$W_q = \frac{\mu \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}{(k-1)!(k\mu - \lambda)^2} \times P_0$$

$$= \frac{6 \left(\frac{10}{6}\right)^2}{1!(12 - 10)^2} \times 0.091 = 0.379 \text{ (ساعة)}$$

$$= 22.74 \text{ (دقيقة)}$$

وفقاً لتوقعات ورغبات إدارة المكتبة فإن :

معدل الوصول ،  $\lambda$  ، سوف يتضاعف ، أي يصبح كما يلي :

$$\lambda = 20 \text{ (طالباً / ساعة)}$$

معدل الخدمة ،  $\mu$  ، هو :

$$\mu = 6 \text{ (طلاب / ساعة)}$$

بعد ذلك يتم حساب متوسط وقت انتظار الطالب في صف الانتظار للبدائل المختلفة لمراكز خدمة الطالب بالمكتبة حتى نصل إلى البديل الذي يحقق الهدف المنشود لإدارة المكتبة على النحو التالي :

البديل الأول : يتم تخصيص 3 موظفين في المكتبة لخدمة الطلاب في عمليات الاستعارة ، أي أن :  $k = 3$   
معامل الاستخدام في هذه الحالة هو :

$$\frac{\lambda}{k\mu} = \frac{20}{3 \times 6} = \frac{10}{9} > 1$$

وحيث أن قيمة معامل الاستخدام تزيد عن الواحد الصحيح فيكون النظام في حالة عدم استقرار ، حيث يزداد طول صف الانتظار في هذه الحالة بلا حدود لذلك فإن هذا البديل سوف يرفض .

البديل الثاني : يتم تخصيص 4 موظفين في المكتبة لخدمة الطلاب في عمليات الاستعارة ، أي أن :  $k = 4$

$$\begin{aligned} P_0 &= \frac{1}{\sum_{n=0}^3 \frac{1}{n!} \left(\frac{20}{6}\right)^n + \frac{1}{4!} \left(\frac{20}{6}\right)^4 \left(\frac{24}{24-20}\right)} \\ &= \frac{1}{\left(1 + \frac{10}{3} + \frac{1}{2} \left(\frac{10}{3}\right)^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{10}{3}\right)^3 + \frac{1}{4!} \left(\frac{10}{3}\right)^4\right) (6)} \\ &= 0.0213 \end{aligned}$$

متوسط وقت الانتظار للطالب في الصف هو :

$$W_q = \frac{\mu \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}{(k-1)! (k\mu - \lambda)^2} \times P_0$$

$$= \frac{6 \left( \frac{20}{6} \right)^4}{3! (24 - 20)^2} \times 0.0213 = 0.164 \text{ (ساعة)}$$

$$= 9.86 \text{ (دقائق)}$$

وهذا المتوسط يكون أقل من نصف متوسط وقت الانتظار الحالي للطالب والذي يساوي 22.74 دقيقة ، أي أن هذا البديل يحقق الهدف الذي تسعى إليه إدارة المكتبة . ويكون القرار الأمثل هو : تخصيص اثنين إضافيين من موظفي المكتبة إلى الاثنين الأصليين ، بمعنى أن يصبح عدد الموظفين الإجمالي المخصص لخدمة أغراض الاستعارة بالمكتبة هو 4 موظفين .

#### (٤-٦) تحليل التكاليف لصفوف الانتظار

عند تصميم نظام صف انتظار معين فإن الإدارة ترغب في معرفة التكلفة الاقتصادية لأنظمة صفوف الانتظار التي يمكنها أن تختار واحداً من بينها ، حيث يتم حساب التكلفة الكلية لتشغيل النظام في الوحدة الزمنية الواحدة ، ثم تختار النظام الذي يحقق أدنى تكلفة كلية متوقعة ويحقق في نفس الوقت مستوى الخدمة الذي تسعى الإدارة إلى تحقيقه .

ويلاحظ أن التكلفة الكلية لتشغيل النظام في الوحدة الزمنية الواحدة عبارة عن مجموع التكلفة الكلية للخدمة في الوحدة الزمنية الواحدة والتكلفة الكلية للانتظار في الوحدة الزمنية الواحدة ، أي أن :

التكاليف الكلية لتشغيل النظام في الوحدة الزمنية الواحدة = التكلفة الكلية لتقديم الخدمة في الوحدة الزمنية الواحدة + التكلفة الكلية للانتظار في الوحدة الزمنية الواحدة .

أي أن :

$$TC = TC_s + TC_w$$

حيث :  $TC$  عبارة عن التكاليف الكلية لتشغيل النظام في الوحدة الزمنية الواحدة

$TC_s$  عبارة عن التكلفة الكلية لتقديم الخدمة في الوحدة الزمنية الواحدة

$TC_w$  عبارة عن التكلفة الكلية للانتظار في الوحدة الزمنية الواحدة

وإذا فرضنا أن تكلفة تقديم الخدمة في الوحدة الزمنية الواحدة للمركز

الواحد هي  $C_s$  ، وأن  $k$  تمثل عدد مراكز الخدمة في النظام ، فإن :

التكلفة الكلية للخدمة في وحدة الزمن الواحدة هي :

$$TC_s = k \times C_s$$

وبفرض أن تكلفة انتظار العميل الواحد في الوحدة الزمنية الواحدة هي

$C_w$  ، وأن متوسط عدد العملاء في النظام هو  $L_s$  ، فإن :

التكلفة الكلية للانتظار في وحدة الزمن الواحدة هي :

$$TC_w = C_w \times L_s$$

العلاقة بين التكلفة الكلية لتقديم الخدمة ،  $TC_s$  ، والتكلفة الكلية للانتظار ،  $TC_w$  ،

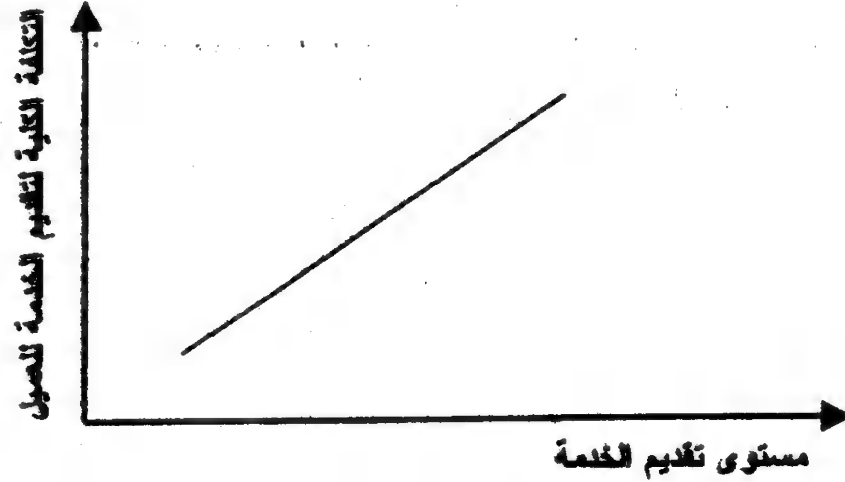
يلاحظ أن كل من تكلفة تقديم الخدمة للعميل وتكلفة انتظار العميل يعد

دالة في مستوى تقديم الخدمة .



فالعلاقة بين مستوى تقديم الخدمة والتكلفة الكلية للخدمة تأخذ الصورة

التالية :

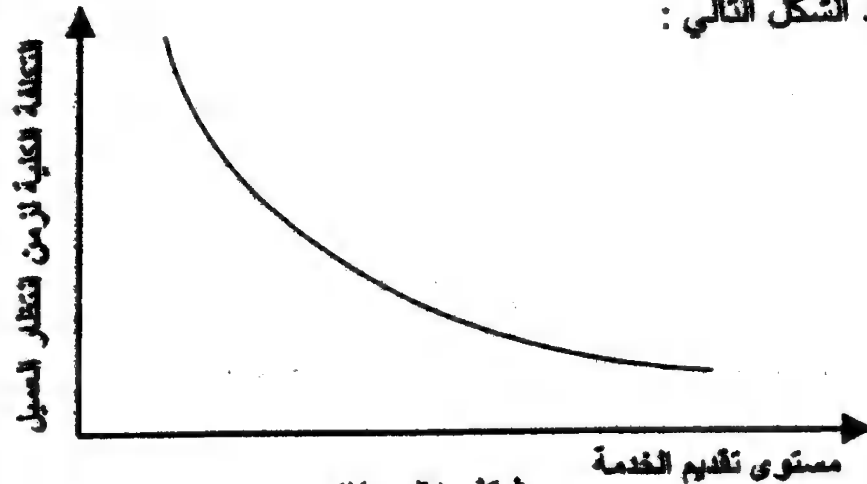


شكل (٦ - ٦)

وكما هو واضح فإن العلاقة بين مستوى تقديم الخدمة والتكلفة الكلية لتقديم الخدمة علاقة طردية ، فكلما زاد مستوى تقديم الخدمة للعميل كلما زادت التكلفة الكلية لتقديم تلك الخدمة .

أما العلاقة بين مستوى تقديم الخدمة للعميل والتكلفة الكلية لزمن انتظار

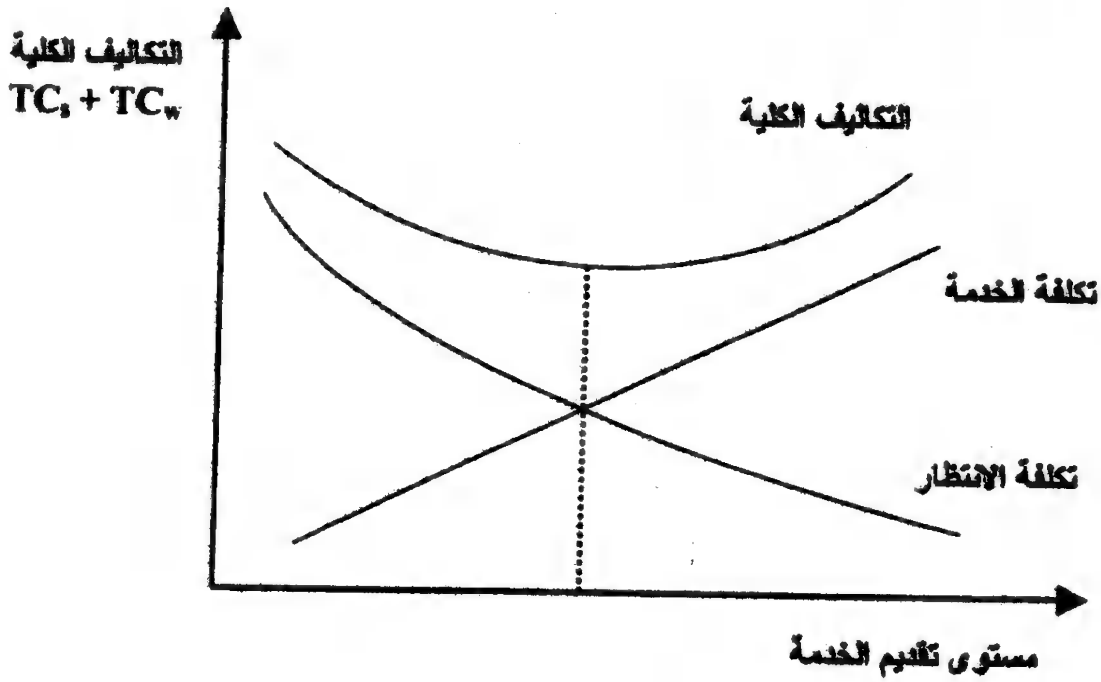
العميل فتأخذ الشكل التالي :



شكل (٧ - ٦)

فكما هو واضح من الشكل (٦ - ٧) أنه بزيادة مستوى تقديم الخدمة للعميل فإن زمن انتظار العميل في صف الانتظار سوف يقل مما يعني انخفاض التكلفة الكلية لانتظار العميل في النظام .

وكما هو واضح فإن العاملين السابقين يخلقان ضغوطاً متناقضة بالنسبة للإدارة أو لمتخذي القرار ، حيث أن خفض تكلفة تقديم الخدمة للعميل يستلزم أدنى مستوى ممكن للخدمة ، بينما هدف خفض زمن انتظار العميل يتطلب مستوى خدمة عالي . لذلك يجب التوصل إلى حل وسط يجمع بين هذين العاملين في الشكل التالي :



شكل (٦ - ٨)

وعلى عكس ما يبدو للوهلة الأولى من أن تقدير التكلفة يعد أمراً بسيطاً فإن هناك صعوبة حقيقية تواجه الإدارة في تقدير كل من إجمالي تكاليف الخدمة ،  $TC_s$  ، للوحدة الزمنية الواحدة ، وإجمالي تكاليف انتظار العملاء ،

$TC_w$  ، للوحدة الزمنية الواحدة . ولعل تقدير تكلفة الانتظار تعد أكثر صعوبة وتحتاج إلى اعتبارات عديدة كما تختلف طريقة تقديرها من منشأة إلى أخرى ، فحساب تكلفة انتظار رجل أعمال مهم في أحد البنوك تختلف بالطبع عن تكلفة انتظار آلة عاطلة للإصلاح داخل مصنع ، وكلاهما يختلف عن تكلفة انتظار مريض داخل عيادة الطبيب وهكذا .

مثال (٥) :

شركة مطاحن شرق الدلتا تملك عدد من سيارات الشحن والتي تصل إليها محملة بالقمح وفق توزيع بواسون بمعدل سيارتين في اليوم . ويوجد لدى الشركة عدد من العمال يقومون بتفريغ السيارات المعبأة بواقع 0.5 سيارة للعامل الواحد في اليوم ، فإذا كان كل عامل من هؤلاء العمال يتقاضى في اليوم 40 جنيها وكل سيارة شحن لا يتم تفريغها ( بسبب انتهاء يوم العمل ) تكلف الشركة 300 جنيه في اليوم .

المطلوب :

تحديد عدد العمال الذين يجب تشغيلهم في الشركة والذي يجعل مجموع تكاليف التفريغ والانتظار أقل ما يمكن .

الحل :

معدل وصول السيارات هو  $\lambda$  ، حيث :

$$\lambda = 2 \text{ (سيارة/يوم)}$$

معدل أداء الخدمة للسيارة هو  $\mu$  ، حيث :

$$\mu = 0.5x \text{ (سيارة/يوم)}$$

حيث  $x$  تشير إلى عدد عمال التفريغ في الشركة .

إجمالي تكلفة الخدمة في اليوم = إجمالي تكلفة تفريغ السيارة في اليوم

هو :

$$TC_s = 40x$$

إجمالي تكلفة الانتظار في اليوم هو :

$$TC_w = C_w L_s$$

حيث :

$$L_s = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{2}{0.5x - 2}$$

$$C_w = 300 \text{ (جنيه)}$$

لنن :

$$TC_w = 300 \left( \frac{2}{0.5x - 2} \right) = \frac{600}{0.5x - 2}$$

وبالتالي فإن :

التكاليف الكلية في اليوم هي :

$$TC = TC_s + TC_w$$

$$= 40x + \frac{600}{0.5x - 2}$$

ولكي يكون النظام في حالة استقرار فيجب أن نتحقق العلاقة التالية :

$$\lambda < \mu$$

أي :

$$2 < 0.5x$$

أي :

$$x > 4$$

وهذا يعني أنه لكي يكون النظام في حالة سكون أو استقرار فإن عدد عمال التفريغ بالشركة يجب ألا يقل عن 5 عمال ، وسوف يتم حساب التكاليف الكلية للتشغيل في اليوم في حالة تشغيل أعداد مختلفة من العمال على النحو التالي :

البديل الأول : تشغيل 5 عمال للتفريغ ( أي أن :  $x = 5$  )

$$\begin{aligned} TC_5 &= 40 \times 5 + \frac{600}{0.5(5) - 2} = \\ &= 200 + 1200 = 1400 \text{ ( جنيه )} \end{aligned}$$

البديل الثاني : تشغيل 6 عمال للتفريغ ( أي أن :  $x = 6$  )

$$\begin{aligned} TC_6 &= 40 \times 6 + \frac{600}{0.5(6) - 2} \\ &= 240 + 600 = 840 \text{ ( جنيهاً )} \end{aligned}$$

البديل الثالث : تشغيل 7 عمال للتفريغ ( أي أن :  $x = 7$  )

$$\begin{aligned} TC_7 &= 40 \times 7 + \frac{600}{0.5(7) - 2} \\ &= 280 + 400 = 680 \text{ ( جنيهاً )} \end{aligned}$$

البديل الرابع : تشغيل 8 عمال للتفريغ ( أي أن :  $x = 8$  )

$$TC_8 = 40 \times 8 + \frac{600}{0.5(8) - 2}$$
$$= 320 + 300 = 620 \text{ ( جنيها )}$$

البديل الخامس : تشغيل 9 عمال للتفريغ ( أي أن :  $x = 9$  )

$$TC_9 = 40 \times 9 + \frac{600}{0.5(9) - 2}$$
$$= 360 + 240 = 600 \text{ ( جنيه )}$$

البديل السادس : تشغيل 10 عمال للتفريغ ( أي أن :  $x = 10$  )

$$TC_{10} = 40 \times 10 + \frac{600}{0.5(10) - 2}$$
$$= 400 + 200 = 600 \text{ ( جنيه )}$$

البديل السابع : تشغيل 11 عامل للتفريغ ( أي أن :  $x = 11$  )

$$TC_{11} = 40 \times 11 + \frac{600}{0.5(11) - 2}$$
$$= 440 + 171.43 = 611.43 \text{ ( جنيها )}$$

البديل الثامن : تشغيل 12 عامل للتفريغ ( أي أن :  $x = 12$  )

$$TC_{12} = 40 \times 12 + \frac{600}{0.5(12) - 2}$$
$$= 480 + 150 = 630 \text{ ( جنيها )}$$

بمقارنة البدائل المختلفة يتضح أن عدد عمال التفريغ الأمثل الذين يجب تشغيلهم في الشركة هو 9 أو 10. عمال يوميا، حيث تكون أصغر تكلفة تشغيل هي 600 جنيه في اليوم .

مثال (٦) :

في أحد البنوك يوجد موظف واحد لصرف الشيكات للعملاء بالبنك ولاحظ مدير البنك كثرة عدد المترددين على البنك من العملاء لصرف الشيكات حيث أن وصول العملاء إلى البنك يتم وفق توزيع بواسون بمعدل 20 عميلا في الساعة ، وأن كل موظف يستطيع أن يصرف الشيك في زمن يتبع التوزيع الأسى بمتوسط شيك واحد في 5 دقائق ، ووجد أن تكلفة انتظار العميل تساوي 0.25 جنيه لكل دقيقة وأن تكلفة موظف الاستقبال تعادل 10 جنيهات في الساعة . لذلك فكر مدير البنك في تحسين مستوى هذه الخدمة بالبنك وذلك عن طريق زيادة عدد الموظفين الذين يقومون بهذه الخدمة ، وعرض على المدير البديلين التاليين :

- ١ - تعيين اثنين من الموظفين .
- ٢ - تعيين ثلاثة من الموظفين .

المطلوب :

مساعدة مدير البنك في اختيار البديل الأفضل .

الحل :

سوف يختار مدير البنك البديل الذي يحقق أقل تكاليف كلية ممكنة لتشغيل النظام .

معدل وصول العملاء ،  $\lambda$  ، هو :

$$\lambda = 20 \text{ (عميلا / ساعة)}$$

معدل الخدمة ،  $\mu$  ، هو :

$$\mu = 60 \div 5 = 12 \text{ (عميلا / ساعة)}$$

تكلفة انتظار العميل الواحد في الساعة هي :

$$C_w = 60 \times 0.25 = 15 \text{ (جنيها / ساعة)}$$

البديل الأول : تعيين اثنين من الموظفين

وهذا يعني وجود مركزين للخدمة ، حيث  $k = 2$

نوجد أولا احتمال أن يكون البنك خاليا من العملاء وهو  $P_0$  ، حيث :

$$\begin{aligned} P_0 &= \frac{1}{\sum_{n=0}^{k-1} \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \frac{1}{k!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \left(\frac{k\mu}{k\mu - \lambda}\right)} \\ &= \frac{1}{\sum_{n=0}^1 \frac{1}{n!} \left(\frac{20}{12}\right)^n + \frac{1}{2!} \left(\frac{20}{12}\right)^2 \left(\frac{2 \times 12}{2 \times 12 - 20}\right)} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{5}{3} + \frac{25}{2 \times 9} (6)} = \frac{1}{\frac{33}{3}} = \frac{3}{33} \\ &= 0.091 \end{aligned}$$



متوسط عدد العملاء طالبي الخدمة في الساعة في البنك هو :

$$L_s = \frac{\lambda \mu \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^k}{(k-1)! (k\mu - \lambda)^2} (P_0) + \frac{\lambda}{\mu}$$
$$= \frac{20(12) \left( \frac{20}{12} \right)^2}{1! (2 \times 12 - 20)^2} (0.091) + \frac{20}{12}$$
$$= 5.39 \text{ ( عملاء )}$$

التكلفة الكلية للانتظار في الساعة هي :

$$TC_w = C_w \times L_s = 15 \times 5.39 = 80.85 \text{ ( جنيهاً / ساعة )}$$

التكلفة الكلية للخدمة في الساعة هي :

$$TC_s = 2 \times 10 = 20 \text{ ( جنيهاً / ساعة )}$$

التكاليف الكلية للتشغيل في الساعة هي :

$$TC = TC_w + TC_s$$
$$= 80.85 + 20 = 100.85 \text{ ( جنيهاً / ساعة )}$$

البديل الثاني : تعيين ثلاثة موظفين

وهذا يعني وجود ثلاثة مراكز للخدمة ، حيث  $k = 3$

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^2 \frac{1}{n!} \left(\frac{20}{12}\right)^n + \frac{1}{3!} \left(\frac{20}{12}\right)^3 \left(\frac{3 \times 12}{3 \times 12 - 20}\right)}$$

$$= \frac{1}{\left(1 + \frac{5}{3} + \frac{25}{18}\right) + \frac{125}{72}} = 0.173$$

متوسط عدد العملاء طالبي الخدمة في الساعة في البنك هو :

$$L_s = \frac{\lambda \mu \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}{(k-1)! (k\mu - \lambda)^2} P_0 + \frac{\lambda}{\mu}$$

$$= \frac{20 \times 12 \left(\frac{20}{12}\right)^2}{2! (3 \times 12 - 20)^2} \times (0.173) + 1.67$$

$$= 0.375 + 1.67 = 2.045 \text{ ( عميل )}$$

التكلفة الكلية للانتظار في الساعة هي :

$$TC_w = C_w \times L_s = 15 \times 2.045 = 30.675 \text{ ( جنيهها / ساعة )}$$

التكلفة الكلية للخدمة في الساعة هي :

$$TC_s = 3 \times 10 = 30 \text{ ( جنيهها / ساعة )}$$

التكاليف الكلية للتشغيل في الساعة هي :

$$TC = TC_w + TC_s$$

$$= 30.675 + 30 = 60.675 \text{ (جنيها / ساعة)}$$

وحيث أن التكاليف الكلية للتشغيل وفقاً للبديل الثاني والتي تبلغ 60.675 جنيها / ساعة أقل من التكاليف الكلية للتشغيل وفقاً للبديل الأول والتي تبلغ 80.85 جنيها / ساعة . لذلك يكون من الأفضل لمدير البنك أن يعين ثلاثة موظفين لخدمة صراف الشيكات للعملاء .



جدول (١) التوزيع الطبيعي المعياري

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	.0000	.0040	.0080	.0120	.0160	.0190	.0239	.0279	.0319	.0359
0.1	.0398	.0438	.0478	.0517	.0557	.0596	.0636	.0675	.0714	.0753
0.2	.0793	.0832	.0871	.0910	.0948	.0987	.1026	.1064	.1103	.1141
0.3	.1179	.1217	.1255	.1293	.1331	.1368	.1406	.1443	.1480	.1517
0.4	.1554	.1591	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
0.5	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
0.6	.2257	.2291	.2324	.2357	.2389	.2422	.2454	.2486	.2517	.2549
0.7	.2580	.2611	.2642	.2673	.2704	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
0.8	.2881	.2910	.2939	.2969	.2995	.3023	.3051	.3078	.3106	.3133
0.9	.3159	.3186	.3212	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389
1.0	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.3577	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665	.3686	.3708	.3729	.3749	.3770	.3790	.3810	.3830
1.2	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925	.3944	.3962	.3980	.3997	.4015
1.3	.4032	.4049	.4066	.4082	.4099	.4115	.4131	.4147	.4162	.4177
1.4	.4192	.4207	.4222	.4236	.4251	.4265	.4279	.4292	.4306	.4319
1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4429	.4441
1.6	.4452	.4463	.4474	.4484	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4554	.4564	.4572	.4582	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.4633
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4713	.4719	.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	.4756	.4761	.4767
2.0	.4772	.4778	.4783	.4788	.4793	.4798	.4803	.4808	.4812	.4817
2.1	.4821	.4826	.4830	.4834	.4838	.4842	.4846	.4850	.4854	.4857
2.2	.4861	.4864	.4868	.4871	.4875	.4878	.4881	.4884	.4887	.4890
2.3	.4893	.4896	.4898	.4901	.4904	.4906	.4909	.4911	.4913	.4916
2.4	.4918	.4920	.4922	.4925	.4927	.4929	.4931	.4932	.4934	.4936
2.5	.4938	.4940	.4941	.4943	.4945	.4946	.4948	.4949	.4951	.4952
2.6	.4953	.4955	.4956	.4957	.4959	.4960	.4961	.4962	.4963	.4964
2.7	.4965	.4966	.4967	.4968	.4969	.4970	.4971	.4972	.4973	.4974
2.8	.4974	.4975	.4976	.4977	.4977	.4978	.4979	.4979	.4980	.4981
2.9	.4981	.4982	.4982	.4983	.4984	.4984	.4985	.4985	.4986	.4986
3.0	.4987	.4987	.4987	.4988	.4988	.4989	.4989	.4989	.4990	.4990

# $P_0$ for Multiple Channel Queues

Number of Channels, S

$\frac{\lambda}{S\mu}$	1	2	3	4	5	6	7
.01	0.9900	0.9802	0.9704	0.9608	0.9512	0.9418	0.9324
.02	0.9800	0.9608	0.9418	0.9231	0.9048	0.8869	0.8694
.03	0.9700	0.9417	0.9139	0.8869	0.8607	0.8353	0.8106
.04	0.9600	0.9231	0.8869	0.8521	0.8187	0.7866	0.7558
.05	0.9500	0.9048	0.8607	0.8187	0.7788	0.7408	0.7047
.06	0.9400	0.8868	0.8353	0.7866	0.7408	0.6977	0.6570
.07	0.9300	0.8692	0.8106	0.7558	0.7047	0.6570	0.6126
.08	0.9200	0.8519	0.7866	0.7261	0.6703	0.6188	0.5712
.09	0.9100	0.8349	0.7633	0.6977	0.6376	0.5827	0.5326
.10	0.9000	0.8182	0.7407	0.6703	0.6065	0.5488	0.4966
.11	0.8900	0.8018	0.7188	0.6440	0.5769	0.5169	0.4630
.12	0.8800	0.7857	0.6975	0.6188	0.5488	0.4868	0.4317
.13	0.8700	0.7699	0.6769	0.5945	0.5220	0.4584	0.4025
.14	0.8600	0.7544	0.6568	0.5712	0.4966	0.4317	0.3753
.15	0.8500	0.7391	0.6373	0.5487	0.4724	0.4066	0.3499
.16	0.8400	0.7241	0.6184	0.5272	0.4493	0.3829	0.3263
.17	0.8300	0.7094	0.6000	0.5065	0.4274	0.3606	0.3042
.18	0.8200	0.6949	0.5821	0.4866	0.4065	0.3396	0.2837
.19	0.8100	0.6807	0.5648	0.4675	0.3867	0.3198	0.2645
.20	0.8000	0.6667	0.5479	0.4491	0.3678	0.3012	0.2466
.21	0.7900	0.6529	0.5316	0.4314	0.3499	0.2836	0.2299
.22	0.7800	0.6393	0.5157	0.4145	0.3328	0.2671	0.2144
.23	0.7700	0.6260	0.5002	0.3981	0.3165	0.2515	0.1999
.24	0.7600	0.6129	0.4852	0.3824	0.3011	0.2369	0.1864
.25	0.7500	0.6000	0.4706	0.3673	0.2863	0.2231	0.1738
.26	0.7400	0.5873	0.4564	0.3528	0.2723	0.2101	0.1620
.27	0.7300	0.5748	0.4426	0.3389	0.2590	0.1978	0.1510
.28	0.7200	0.5625	0.4292	0.3255	0.2463	0.1863	0.1408
.29	0.7100	0.5504	0.4161	0.3126	0.2343	0.1754	0.1313
.30	0.7000	0.5385	0.4035	0.3002	0.2228	0.1652	0.1224
.31	0.6900	0.5267	0.3911	0.2882	0.2118	0.1555	0.1141
.32	0.6800	0.5152	0.3791	0.2768	0.2014	0.1464	0.1064
.33	0.6700	0.5038	0.3675	0.2657	0.1915	0.137	0.0992

تابع جدول (٢)

Number of Channels, S (continued)

$\frac{\lambda}{S\mu}$	1	2	3	4	5	6	7
.34	0.6600	0.4925	0.3561	0.2551	0.1821	0.1298	0.0925
.35	0.6500	0.4815	0.3451	0.2449	0.1731	0.1222	0.0862
.36	0.6400	0.4706	0.3343	0.2351	0.1646	0.1151	0.0804
.37	0.6300	0.4599	0.3238	0.2256	0.1565	0.1083	0.0749
.38	0.6200	0.4493	0.3137	0.2165	0.1487	0.1020	0.0698
.39	0.6100	0.4388	0.3038	0.2077	0.1413	0.0960	0.0651
.40	0.6000	0.4286	0.2941	0.1993	0.1343	0.0903	0.0606

Number of Channels, S

$\frac{\lambda}{S\mu}$	8	9	10	11	12	13	14	15
.01	0.9231	0.9139	0.9048	0.8958	0.8869	0.8781	0.8694	0.8607
.02	0.8521	0.8353	0.8187	0.8025	0.7866	0.7711	0.7558	0.7408
.03	0.7866	0.7634	0.7408	0.7189	0.6977	0.6771	0.6570	0.6376
.04	0.7262	0.6977	0.6703	0.6440	0.6188	0.5945	0.5712	0.5488
.05	0.6703	0.6376	0.6065	0.5770	0.5488	0.5220	0.4966	0.4724
.06	0.6189	0.5827	0.5488	0.5169	0.4868	0.4584	0.4317	0.4066
.07	0.5712	0.5326	0.4966	0.4630	0.4317	0.4025	0.3753	0.3499
.08	0.5273	0.4868	0.4493	0.4148	0.3829	0.3535	0.3263	0.3012
.09	0.4868	0.4449	0.4066	0.3716	0.3396	0.3104	0.2837	0.2592
.10	0.4493	0.4066	0.3679	0.3329	0.3012	0.2725	0.2466	0.2231
.11	0.4148	0.3716	0.3329	0.2982	0.2671	0.2393	0.2144	0.1921
.12	0.3829	0.3396	0.3012	0.2671	0.2369	0.2101	0.1864	0.1653
.13	0.3535	0.3104	0.2725	0.2393	0.2101	0.1845	0.1620	0.1423
.14	0.3263	0.2837	0.2466	0.2144	0.1864	0.1620	0.1409	0.1225
.15	0.3012	0.2592	0.2231	0.1921	0.1653	0.1423	0.1225	0.1054
.16	0.2780	0.2369	0.2019	0.1720	0.1466	0.1249	0.1065	0.0907
.17	0.2567	0.2165	0.1827	0.1541	0.1300	0.1097	0.0926	0.0781
.18	0.2369	0.1979	0.1653	0.1381	0.1153	0.0963	0.0805	0.0672
.19	0.2187	0.1809	0.1496	0.1237	0.1023	0.0846	0.0699	0.0578
.20	0.2019	0.1653	0.1353	0.1108	0.0907	0.0743	0.0608	0.0498
.21	0.1864	0.1511	0.1225	0.0993	0.0805	0.0652	0.0529	0.0429
.22	0.1720	0.1381	0.1108	0.0889	0.0714	0.0573	0.0460	0.0369
.23	0.1588	0.1262	0.1003	0.0797	0.0633	0.0503	0.0400	0.0317
.24	0.1466	0.1153	0.0907	0.0714	0.0561	0.0442	0.0347	0.0273
.25	0.1353	0.1054	0.0821	0.0639	0.0498	0.0388	0.0302	0.0235
.26	0.1249	0.0963	0.0743	0.0573	0.0442	0.0340	0.0263	0.0202
.27	0.1153	0.0880	0.0672	0.0513	0.0392	0.0299	0.0228	0.0174
.28	0.1064	0.0805	0.0608	0.0460	0.0347	0.0263	0.0198	0.0150
.29	0.0983	0.0735	0.0550	0.0412	0.0308	0.0231	0.0172	0.0129
.30	0.0907	0.0672	0.0498	0.0369	0.0273	0.0202	0.0150	0.0111
.31	0.0837	0.0614	0.0450	0.0330	0.0242	0.0178	0.0130	0.0096
.32	0.0773	0.0561	0.0408	0.0296	0.0215	0.0155	0.0113	0.0082
.33	0.0713	0.0513	0.0369	0.0265	0.0191	0.0137	0.0099	0.0071
.34	0.0658	0.0469	0.0334	0.0238	0.0169	0.0120	0.0085	0.0061
.35	0.0608	0.0428	0.0302	0.0213	0.0150	0.0106	0.0074	0.0052
.36	0.0561	0.0391	0.0273	0.0191	0.0133	0.0093	0.0065	0.0045
.37	0.0518	0.0358	0.0247	0.0171	0.0118	0.0081	0.0056	0.0039
.38	0.0478	0.0327	0.0224	0.0153	0.0105	0.0071	0.0049	0.0033
.39	0.0441	0.0299	0.0202	0.0137	0.0093	0.0063	0.0043	0.0029
.40	0.0407	0.0273	0.0183	0.0123	0.0082	0.0055	0.0037	0.0025

تابع جدول (۲)

Number . Channels, S

$\frac{\lambda}{\mu}$	1	2	3	4	5	6	7
.41	0.5900	0.4184	0.2847	0.1912	0.1276	0.0850	0.0565
.42	0.5800	0.4085	0.2756	0.1834	0.1213	0.0800	0.0527
.43	0.5700	0.3986	0.2667	0.1758	0.1152	0.0753	0.0491
.44	0.5600	0.3889	0.2580	0.1686	0.1094	0.0700	0.0457
.45	0.5500	0.3793	0.2496	0.1616	0.1039	0.0666	0.0426
.46	0.5400	0.3699	0.2414	0.1549	0.0987	0.0626	0.0397
.47	0.5300	0.3605	0.2333	0.1484	0.0937	0.0589	0.0370
.48	0.5200	0.3514	0.2255	0.1422	0.0889	0.0554	0.0344
.49	0.5100	0.3423	0.2179	0.1362	0.0844	0.0521	0.0321
.50	0.5000	0.3333	0.2105	0.1304	0.0801	0.0490	0.0298
.51	0.4900	0.3245	0.2033	0.1249	0.0760	0.0460	0.0278
.52	0.4800	0.3158	0.1963	0.1195	0.0721	0.0432	0.0259
.53	0.4700	0.3072	0.1894	0.1143	0.0683	0.0406	0.0241
.54	0.4600	0.2987	0.1827	0.1094	0.0648	0.0381	0.0224
.55	0.4500	0.2903	0.1762	0.1046	0.0614	0.0358	0.0208
.56	0.4400	0.2821	0.1699	0.0999	0.0581	0.0336	0.0194
.57	0.4300	0.2739	0.1637	0.0955	0.0551	0.0315	0.0180
.58	0.4200	0.2658	0.1576	0.0912	0.0521	0.0296	0.0167
.59	0.4100	0.2579	0.1517	0.0870	0.0493	0.0277	0.0155
.60	0.4000	0.2500	0.1460	0.0831	0.0466	0.0260	0.0144
.61	0.3900	0.2422	0.1404	0.0792	0.0441	0.0244	0.0134
.62	0.3800	0.2346	0.1349	0.0755	0.0417	0.0228	0.0124
.63	0.3700	0.2270	0.1296	0.0719	0.0394	0.0214	0.0115
.64	0.3600	0.2195	0.1244	0.0685	0.0372	0.0200	0.0107
.65	0.3500	0.2121	0.1193	0.0651	0.0350	0.0187	0.0099
.66	0.3400	0.2048	0.1143	0.0619	0.0330	0.0175	0.0092
.67	0.3300	0.1976	0.1095	0.0588	0.0311	0.0163	0.0085
.68	0.3200	0.1905	0.1048	0.0559	0.0293	0.0152	0.0079
.69	0.3100	0.1834	0.1002	0.0530	0.0276	0.0142	0.0073
.70	0.3000	0.1765	0.0957	0.0502	0.0259	0.0132	0.0067
.71	0.2900	0.1696	0.0913	0.0475	0.0243	0.0123	0.0062
.72	0.2800	0.1628	0.0870	0.0450	0.0228	0.0114	0.0057
.73	0.2700	0.1561	0.0828	0.0425	0.0214	0.0106	0.0053
.74	0.2600	0.1494	0.0788	0.0401	0.0200	0.0099	0.0048
.75	0.2500	0.1429	0.0748	0.0377	0.0187	0.0091	0.0044
.76	0.2400	0.1364	0.0709	0.0355	0.0174	0.0085	0.0041
.77	0.2300	0.1299	0.0671	0.0333	0.0162	0.0078	0.0037
.78	0.2200	0.1236	0.0634	0.0313	0.0151	0.0072	0.0034
.79	0.2100	0.1173	0.0597	0.0292	0.0140	0.0066	0.0031



تابع جدول (۲)

Number of Channels, s

$\frac{\lambda}{54}$	8	9	10	11	12	13	14	15
.41	0.0176	0.0249	0.0166	0.0110	0.0073	0.0048	0.0032	0.0021
.42	0.0347	0.0228	0.0150	0.0098	0.0065	0.0043	0.0028	0.0018
.43	0.0320	0.0208	0.0136	0.0088	0.0057	0.0037	0.0024	0.0016
.44	0.0295	0.0190	0.0123	0.0079	0.0051	0.0033	0.0021	0.0014
.45	0.0272	0.0174	0.0111	0.0071	0.0045	0.0029	0.0018	0.0012
.46	0.0251	0.0159	0.0100	0.0063	0.0040	0.0025	0.0016	0.0010
.47	0.0232	0.0145	0.0091	0.0057	0.0035	0.0022	0.0014	0.0009
.48	0.0214	0.0132	0.0082	0.0051	0.0031	0.0019	0.0012	0.0007
.49	0.0197	0.0121	0.0074	0.0045	0.0028	0.0017	0.0010	0.0006
.50	0.0182	0.0110	0.0067	0.0041	0.0025	0.0015	0.0009	0.0006
.51	0.0167	0.0101	0.0061	0.0036	0.0022	0.0013	0.0008	0.0005
.52	0.0154	0.0092	0.0055	0.0033	0.0019	0.0012	0.0007	0.0004
.53	0.0142	0.0081	0.0050	0.0029	0.0017	0.0010	0.0006	0.0004
.54	0.0131	0.0077	0.0045	0.0026	0.0015	0.0009	0.0005	0.0003
.55	0.0121	0.0070	0.0040	0.0023	0.0014	0.0008	0.0005	0.0003
.56	0.0111	0.0064	0.0037	0.0021	0.0012	0.0007	0.0004	0.0002
.57	0.0102	0.0058	0.0033	0.0019	0.0011	0.0006	0.0003	0.0002
.58	0.0094	0.0053	0.0030	0.0017	0.0009	0.0005	0.0003	0.0002
.59	0.0087	0.0048	0.0027	0.0015	0.0008	0.0005	0.0003	0.0001
.60	0.0080	0.0044	0.0024	0.0013	0.0007	0.0004	0.0002	0.0001
.61	0.0073	0.0040	0.0022	0.0012	0.0007	0.0004	0.0002	0.0001
.62	0.0068	0.0037	0.0020	0.0011	0.0006	0.0003	0.0002	0.0001
.63	0.0062	0.0033	0.0018	0.0010	0.0005	0.0003	0.0001	0.0001
.64	0.0057	0.0030	0.0016	0.0009	0.0005	0.0002	0.0001	0.0001
.65	0.0052	0.0028	0.0015	0.0008	0.0004	0.0002	0.0001	0.0001
.66	0.0048	0.0025	0.0013	0.0007	0.0004	0.0002	0.0001	0.0001
.67	0.0044	0.0023	0.0012	0.0006	0.0003	0.0002	0.0001	0.0001
.68	0.0040	0.0021	0.0011	0.0005	0.0003	0.0001	0.0001	0.0001
.69	0.0037	0.0019	0.0010	0.0005	0.0002	0.0001	0.0001	0.0001
.70	0.0034	0.0017	0.0009	0.0004	0.0002	0.0001	0.0001	0.0001
.71	0.0031	0.0015	0.0008	0.0004	0.0002	0.0001	0.0000	0.0001
.72	0.0028	0.0014	0.0007	0.0003	0.0002	0.0001	0.0000	0.0001
.73	0.0026	0.0013	0.0006	0.0003	0.0001	0.0001	0.0000	0.0001
.74	0.0024	0.0011	0.0005	0.0003	0.0001	0.0001	0.0000	0.0001
.75	0.0021	0.0010	0.0005	0.0002	0.0001	0.0001	0.0000	0.0001
.76	0.0019	0.0009	0.0004	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000	0.0001
.77	0.0018	0.0008	0.0004	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000	0.0001
.78	0.0016	0.0008	0.0004	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000	0.0001
.79	0.0015	0.0007	0.0003	0.0001	0.0001	0.0000	0.0000	0.0001

تابع جدول (٢)

Number of Channels, S

$\frac{\lambda}{\mu}$	1	2	3	4	5	6	7
.80	0.2000	0.1111	0.0562	0.0273	0.0130	0.0061	0.0028
.81	0.1900	0.1050	0.0527	0.0254	0.0120	0.0056	0.0026
.82	0.1800	0.0989	0.0493	0.0236	0.0111	0.0051	0.0023
.83	0.1700	0.0929	0.0460	0.0219	0.0102	0.0047	0.0021
.84	0.1600	0.0870	0.0428	0.0202	0.0093	0.0042	0.0019
.85	0.1500	0.0811	0.0396	0.0186	0.0085	0.0038	0.0017
.86	0.1400	0.0753	0.0366	0.0170	0.0077	0.0035	0.0015
.87	0.1300	0.0695	0.0335	0.0155	0.0070	0.0031	0.0014
.88	0.1200	0.0638	0.0306	0.0140	0.0063	0.0028	0.0012
.89	0.1100	0.0582	0.0277	0.0126	0.0056	0.0024	0.0011
.90	0.1000	0.0526	0.0249	0.0113	0.0050	0.0021	0.0009
.91	0.0900	0.0471	0.0222	0.0099	0.0043	0.0019	0.0008
.92	0.0800	0.0417	0.0195	0.0087	0.0038	0.0016	0.0007
.93	0.0700	0.0363	0.0168	0.0075	0.0032	0.0014	0.0006
.94	0.0600	0.0309	0.0143	0.0063	0.0027	0.0011	0.0005
.95	0.0500	0.0256	0.0118	0.0051	0.0022	0.0009	0.0004
.96	0.0400	0.0204	0.0093	0.0040	0.0017	0.0007	0.0003
.97	0.0300	0.0152	0.0069	0.0030	0.0012	0.0005	0.0002
.98	0.0200	0.0101	0.0045	0.0019	0.0005	0.0003	0.0001
.99	0.0100	0.0050	0.0022	0.0010	0.0004	0.0002	0.0001

$\frac{\lambda}{\mu}$	8	9	10	11	12	13	14	15
.80	0.0013	0.0006	0.0003	0.0001	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
.81	0.0012	0.0005	0.0002	0.0001	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
.82	0.0011	0.0005	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
.83	0.0010	0.0004	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
.84	0.0009	0.0004	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
.85	0.0008	0.0003	0.0001	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
.86	0.0007	0.0003	0.0001	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
.87	0.0006	0.0003	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
.88	0.0005	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
.89	0.0005	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
.90	0.0004	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
.91	0.0003	0.0001	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
.92	0.0003	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
.93	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
.94	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
.95	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
.96	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
.97	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
.98	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
.99	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

## قائمة المراجع

### أولاً : المراجع العربية :

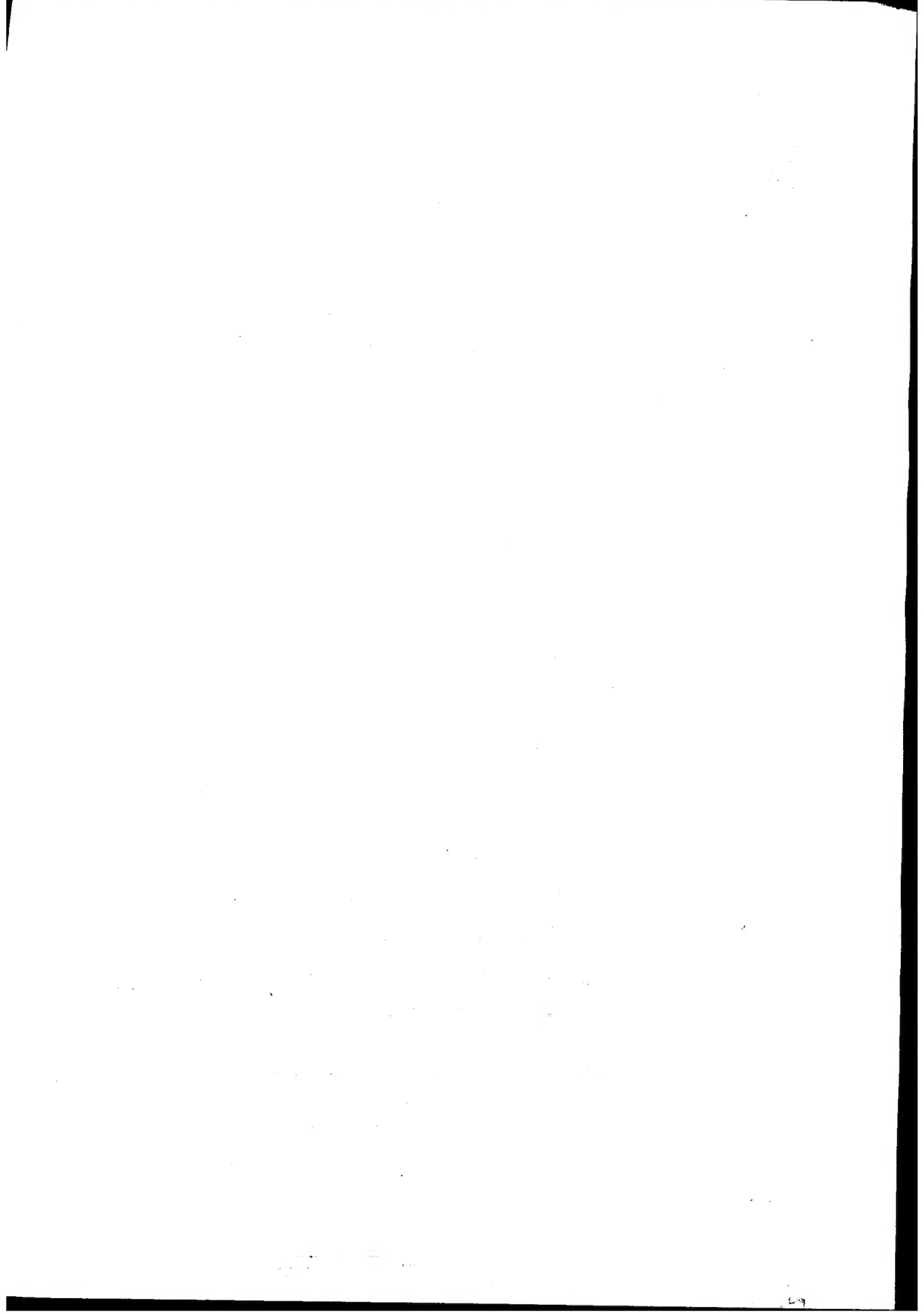
- ١ - أحمد رفيق قاسم ( ١٩٩٢ ) ، المدخل إلى بحوث العمليات ، منشورات جامعة حلب - كلية الاقتصاد .
- ٢ - أحمد محمد زامل ، عبد الغفار شحاتة ( ٢٠٠٣ ) ، بحوث العمليات في المحاسبة ، المكتبة العلمية ، الزقازيق .
- ٣ - إسماعيل السيد ، جلال العبد ( ٢٠٠٣ ) ، الأساليب الكمية في الإدارة ، الدار الجامعية ، الإسكندرية .
- ٤ - تركي إبراهيم سلطان ( ١٩٨٧ ) ، التحليلات الكمية في اتخاذ القرار ، المركز الأمريكي للاستشارات الهندسية ، كندا .
- ٥ - حسن حسنى الغباري ( ١٩٨٨ ) ، سلسلة ملخصات شوم : بحوث العمليات ، الدار الدولية للنشر والتوزيع ، القاهرة .
- ٦ - حسن عبد الله أبو ركة ( ١٩٨٦ ) ، بحوث العمليات وتطبيقاتها في مجال الإدارة ، الطبعة الرابعة ، مطابع دار البلاد ، جدة .
- ٧ - سلطان محمد عبد الحميد ، محمد توفيق البلقيني ( ٢٠٠٢ ) ، مقدمة في بحوث العمليات ، مكتبة الجلاء الجديدة ، المنصورة .
- ٨ - سمير أبو الفتوح صالح ( ٢٠٠١ ) ، بحوث العمليات لدعم القرارات في ظل التشغيل الإلكتروني ، مكتبة الجلاء الجديدة ، المنصورة .

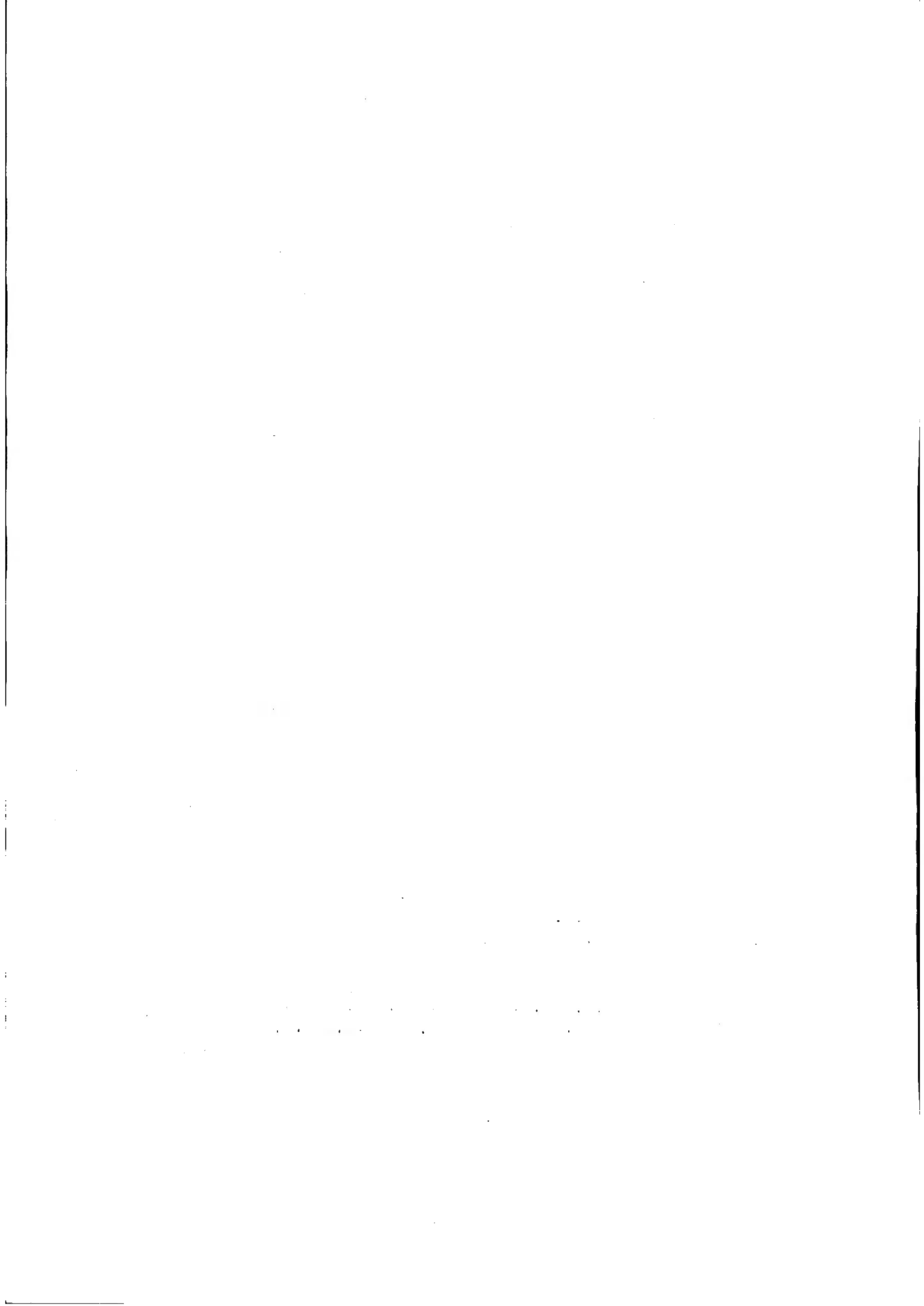
- ٩ - محمد صالح الحناوي ، محمد توفيق ماضي ( ٢٠٠١ ) ، بحوث العمليات في تخطيط ومراقبة الإنتاج ، الدار الجامعية ، الإسكندرية .
- ١٠ - محمد فتحي محمد علي ( ١٩٩٤ ) ، الإحصاء التجاري وبحوث العمليات ، الجزء الأول ، مكتبة عين شمس ، القاهرة .
- ١١ - محمد فخري مكي ( ١٩٩٣ ) ، نماذج بحوث العمليات في التطبيق الاقتصادي ، مكتبة المدينة ، الزقازيق .
- ١٢ - محمد فخري مكي وآخرون ( ٢٠٠٢ ) ، بحوث العمليات في إنتاج وترشيد المعلومات المحاسبية ، مكتبة المدينة ، الزقازيق .

#### ثانياً ، المراجع الأجنبية :

1. Abraham, M.G. (2001), **An Introduction to Linear Programming and the Theory of Games**, Dover Publications, INC. Mineola, New York.
2. Anderson, D.R., Sweeney, D.J., and Williams, T.A. (2000), **An Introduction to Management Science: Quantitative Applications to Decision Making**, Ninth Edition, South-Western College Publishing, New York.
3. Barry, R., Ralph, M., and Stair, J.R. (2001), **Quantitative Analysis for Management**, Seventh Edition, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey.

4. Bronson, R. (1982), **Operations Research**, Mc. Graw Hill Book Comp.
5. Bronson, R. and Naadimuthu, G. (2002), **Schaum's Outline of Operations Research**, Second Edition, Mc. Graw Hill, New York.
6. Curwin, J. and Slater, R. (2002), **Quantitative Methods for Business Decisions**, Fifth Edition, Thomson Learning, London.
7. Ecker, J.G. and Kupferschmid (1988), **Introduction to Operations Research**, John-Wiley & Sons, New York.
8. Gupta, P.K. and Hira, D.S. (1999), **Operations Research**, S. Chand & Comp. LTD, New Delhi.
9. Hiller, F.S. and Lieberman, G.J. (1999), **Introduction to Operations Research**, Mc. Graw Hill International Editions, New York.
10. Richard, E.T. (1981), **Quantitative Methods for Decision Making in Business**, The Dryden Press.
11. Taha, H.A. (2004), **Operations Research: An Introduction**, Seventh Edition, Macmillan Publishing.
12. Zions, S. (1974), **Linear and Integer Programming**, Prentice-Hall, Inc. NJ.







۲۲ ش. رازی همدان - ۱۹۱۵۱۳۶